

КРИМИНАЛИСТИЧКО-ПОЛИЦИЈСКИ УНИВЕРЗИТЕТ

Департман форензичког инжењерства



Снежана Стојичић

**МАТЕМАТИЧКО-СТОХАСТИЧКИ
МОДЕЛИ ДИНАМИКЕ ОДРЕЂЕНИХ
ОБЛИКА КРИВИЧНИХ ДЕЛА ЗНАЧАЈНИХ
ЗА ФОРЕНЗИЧКЕ АНАЛИЗЕ**

- докторска дисертација -

Београд, 2026.

UNIVERSITY OF CRIMINAL INVESTIGATION AND
POLICE STUDIES

Department of Forensic Engineering



Snežana Stojičić

**MATHEMATICAL-STOCHASTIC MODELS OF
THE DYNAMICS OF CERTAIN FORMS OF
CRIMINAL OFFENCES SIGNIFICANT FOR
FORENSIC ANALYSES**

- doctoral dissertation -

Belgrade, 2026.

**ИНФОРМАЦИЈЕ О МЕНТОРИМА И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ ЗА ОДБРАНУ
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

др Владица Стојановић, редовни професор Криминалистичко- полицијског универзитета у
Београду

др Радован Радовановић, редовни професор Криминалистичко- полицијског универзитета
у Београду

КОМИСИЈА

др Душан Јоксимовић, председник, редовни професор Криминалистичко- полицијског
универзитета у Београду

др Иван Аранђеловић, члан, редовни професор Машинског факултета Универзитета у
Београду

др Драган Милановић, члан, редовни професор Машинског факултета Универзитета у
Београду

У Београду,

Датум:

Наслов докторске дисертације: „Математичко-стохастички модели динамике одређених облика кривичних дела значајних за форензичке анализе“

Сажетак: Савремене друштвене промене, технолошки развој и глобализација довели су до трансформације разних облика криминалитета, чинећи његову анализу све сложенијом и захтевнијом. У том контексту, потреба за прецизним, формално заснованим моделима који могу да опишу, предвиде и објасне динамику одређених кривичних дела постаје не само научни изазов, већ и практична неопходност.

Циљ ове дисертације је да се развију и примене математичко-стохастички модели који могу да опишу временску и просторну динамику специфичних облика криминалитета, са посебним освртом на оне који су од значаја за форензичке анализе. Полазећи од постојећих теоријских оквира, укључујући детерминистичке моделе засноване на обичним и парцијалним диференцијалним једначинама, као и стохастичке процесе, овај студија тежи да понуди нове приступе који боље одговарају емпиријским подацима и сложености реалних појава.

Истраживање је засновано на анализи података о кривичним делима у Републици Србији у периоду од 2015. до 2024. године, уз идентификацију серија података према врсти кривичних дела (од интереса за примену метода форензичког инжењерства), као и примену модела који могу да опишу флукуације, структурне промене и просторне корелације ових серија. Посебна пажња је посвећена развоју нових модела, као и примени метода хомотопских пертурбација у решавању нелинеарних динамичких система диференцијалних једначина.

Научни допринос дисертације огледа се у синтези теоријских и практичних приступа, развоју нових формалних алата за анализу криминалитета, као и у могућности примене добијених резултата у форензичкој пракси и креирању јавних политика. Структура рада прати логичан ток од теоријског оквира, преко методологије и емпиријске анализе, до формулисања закључака и препорука.

Кључне речи: моделовање динамике криминала; форензичка анализа криминалних дела; детерминистички модели; стохастички модели; оптимизација

Научна област: Форензичке науке; Математика

Научна подобласт: Форензичка аналитика; Примењена математика

Dissertation title: " Mathematical-stochastic models of the dynamics of certain forms of criminal offenses important for forensic analyses"

Abstract: Modern social changes, technological development and globalization have led to a transformation of the various forms of crime, making its analysis increasingly complex and demanding. In this context, the need for precise, formally based models that can describe, predict and explain the dynamics of certain criminal acts is becoming not only a scientific challenge, but also a practical necessity.

The aim of this dissertation is to develop and apply mathematical-stochastic models that can describe the temporal and spatial dynamics of specific forms of crime, with a special focus on those that are of importance for forensic analysis. Starting from existing theoretical frameworks, including deterministic models based on ordinary and partial differential equations, as well as stochastic processes, this study aims to offer new approaches that better match the empirical data and the complexity of real phenomena.

The research is based on the analysis of data on criminal offenses in Republic of Serbia in the period from 2015 to 2024, with the identification of data series according to the type of criminal offense (of interest for the application of forensic engineering methods), and the application of models that can describe fluctuations, structural changes and spatial correlations. Special attention is paid to the development of new models, as well as the application of the homotopy perturbation method in solving nonlinear dynamic systems of differential equations.

The scientific contribution of the dissertation is reflected in the synthesis of theoretical and practical approaches, the development of new formal tools for the analysis of crime, as well as in the possibility of applying the obtained results in forensic practice and the creation of public policies. The structure of the work follows a logical flow from the theoretical framework, through methodology and empirical analysis, to the formulation of conclusions and recommendations.

Keywords: modeling of crime dynamics; forensic analysis of criminal acts; deterministic models; stochastic models; optimization

Scientific field: Forensic sciences; Mathematics

Scientific subfield: Forensic analytics; Applied mathematics

САДРЖАЈ

СПИСАК СКРАЋЕНИЦА.....	8
СПИСАК ТАБЕЛА	11
СПИСАК СЛИКА	13
1. УВОД.....	16
1.1 ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА.....	18
1.2 ЦИЉЕВИ ИСТРАЖИВАЊА	18
1.3 ХИПОТЕТИЧКИ ОКВИР. МЕТОДЕ ИСТРАЖИВАЊА	19
1.4 ОСТВАРЕНИ РЕЗУЛТАТИ	21
1.5 СТРУКТУРА РАДА.....	22
2. ТЕОРИЈСКИ ОКВИР	24
2.1 ПОЈАМ И ВРСТЕ МОДЕЛА	25
2.1.1 Математички модели	26
2.1.2 Детерминистички и стохастички модели	27
2.2 ОБИЧНЕ И ПАРЦИЈАЛНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ.....	29
2.2.1 Основни појмови и дефиниције	29
2.2.2 Егзистенција и јединственост решења	31
2.2.3 Решавање линеарне диференцијалне једначине.....	33
2.3 ХОМОТОПСКО-ПЕРТУРБАЦИОНИ МЕТОД (НРМ).....	35
2.3.1 Основни принципи НРМ-а.....	35
2.3.2 Кошијеви проблеми у НРМ-у	38
2.4 STOPBREAK и GSB ПРОЦЕСИ	38
2.5 ЈЕДИНИЧНЕ РАСПОДЕЛЕ И ПАР МОДЕЛИ	44
2.5.1 Јединичне расподеле.....	44
2.5.2 Пропорционални ауторегресивни (PAR) модел	46
2.6 ФОРЕНЗИЧКО ИНЖЕЊЕРСТВО И САВРЕМЕНА ФОРЕНЗИЧКА АНАЛИТИКА	48
2.6.1 Форензичко инжењерство као област примене математичких модела...48	
2.6.2 Форензички аналитички циклус	50
2.6.3 Методе форензичког инжењерства	54
2.6.4 Очекивани резултати примене метода форензичког инжењерства, интерпретација и подршка одлучивању	58
2.7 ЕЛЕМЕНТИ ФОРЕНЗИЧКЕ ИНТЕЛИГЕНЦИЈЕ	59
3. МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА И ОПИС ПОДАТАКА	63

3.1	ПОДАЦИ О ОДРЕЂЕНИМ КРИВИЧНИМ ДЕЛИМА ОД ИНТЕРЕСА ЗА ПРИМЕНУ ФОРЕНЗИЧКИХ МЕТОДА	65
3.2	ВРЕМЕНСКА ДИСТРИБУЦИЈА	69
3.3	ПРОСТОРНА ДИСТРИБУЦИЈА.....	74
4.	ДЕТЕРМИНИСТИЧКИ МОДЕЛ КРИМИНАЛНИХ АКТИВНОСТИ	82
4.1	МСА МОДЕЛ.....	83
4.1.1	<i>Дефиниција проблема и МСА модела</i>	<i>83</i>
4.1.2	<i>Егзистенција и јединственост решења</i>	<i>85</i>
4.2	РЕШАВАЊЕ МСА МОДЕЛА МЕТОДОМ ХОМОТОПСКИХ ПЕРТУРБАЦИЈА	89
4.2.1	<i>НРМ трансформација МСА модела.....</i>	<i>90</i>
4.2.2	<i>Егзистенција и јединственост НРМ решења</i>	<i>94</i>
4.3	ВАЛИДАЦИЈА НРМ ПРОЦЕДУРЕ	97
4.3.1	<i>Серија А</i>	<i>98</i>
4.3.2	<i>Серија В</i>	<i>102</i>
4.3.3	<i>Серија С.....</i>	<i>104</i>
4.4	ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА МОДЕЛА	105
5.	СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ ДИНАМИКЕ КРИМИНАЛА	110
5.1	2D-GSB ПРОЦЕС	112
5.1.1	<i>Дефиниција и структура 2D-GSB процеса.....</i>	<i>114</i>
5.1.2	<i>Дистрибутивна својства 2D-GSB процеса</i>	<i>122</i>
5.1.3	<i>Оцене параметара.....</i>	<i>132</i>
5.1.4	<i>Нумеричке симулације и примена модела.....</i>	<i>145</i>
5.2	QHU-PAR МОДЕЛ ДИНАМИКЕ СПЕЦИФИЧНИХ ОБЛИКА КРИМИНАЛИТЕТА.....	160
5.2.1	<i>Дефиниција и основне особине QHU-PAR(1) процеса.....</i>	<i>162</i>
5.2.2	<i>Практични аспект примене QHU-PAR(1) процеса</i>	<i>173</i>
6.	ФОРЕНЗИЧКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА И ПРИМЕНА МОДЕЛА	189
6.1	ИДЕНТИФИКАЦИЈА ФОРЕНЗИЧКЕ ПЕРСПЕКТИВЕ ПРИМЕЊЕНИХ МОДЕЛА	190
6.2	ФОРЕНЗИЧКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА ДЕТЕРМИНИСТИЧКОГ (МСА) МОДЕЛА	193
6.2.1	<i>Анализа стабилности система.....</i>	<i>194</i>
6.2.2	<i>Идентификација критичних тачака.....</i>	<i>195</i>
6.2.3	<i>Динамичко праћење трендова.....</i>	<i>195</i>
6.2.4	<i>Форензички значај НРМ апроксимације.....</i>	<i>196</i>
6.2.5	<i>Форензички значај валидације на реалним подацима (Серије А, В, С).....</i>	<i>197</i>
6.2.6	<i>Форензичка примена МСА модела</i>	<i>198</i>

6.3	ФОРЕНЗИЧКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА СТОХАСТИЧКИХ МОДЕЛА (2D-GSB и PAR).....	202
6.3.1	<i>Улога стохастичких модела у форензичкој анализи</i>	<i>203</i>
6.3.2	<i>Форензичка интерпретација 2D-GSB модела.....</i>	<i>204</i>
6.3.3	<i>Форензичка интерпретација QHU-PAR(1) модела</i>	<i>209</i>
6.4	АСПЕКТ ПРИМЕНЕ У ОБЛАСТИ ФОРЕНЗИЧКЕ ИНТЕЛИГЕНЦИЈЕ	212
6.5	ПРИМЕНА У ФОРЕНЗИЧКОЈ ПРАКСИ.....	217
6.6	ОГРАНИЧЕЊА И ДАЉИ ПРАВЦИ	219
7.	ЗАКЉУЧАК.....	223
8.	ЛИТЕРАТУРА.....	227
А.	АУТОРСКИ РАДОВИ.....	240
9.	БИОГРАФИЈА	241

СПИСАК СКРАЋЕНИЦА

2D-GSB	Дводимензионални - генерализовани STOPBREAK модел
ACF	Аутокорелациона функција (енг. <i>Autocorrelation function</i>)
AD тест	Андерсон-Дарлинггов тест (енг. <i>Anderson–Darling test</i>)
AFIS	Аутоматизовани систем за идентификацију отисака прстију (енг. <i>Automated Fingerprint Identification System</i>)
AHP	Аналитички хијерархијски процес (енг. <i>Analytical Hierarchy Process</i>)
AIC	Акаикеов информациони критеријум (енг. <i>Akaike Information Criterion</i>)
AN	Асимптотска нормалност (енг. <i>Asymptotic Normality</i>)
AR модел	Ауторегресивни модел (енг. <i>Auto-Regressive Model</i>)
ARIMA модел	Модел ауторегресивних интегрисаних покретних просека (енг. <i>Auto-Regressive Integrated Moving Average Model</i>)
ARMA модел	Модел ауторегресивних покретних просека (енг. <i>Auto-Regressive Moving Average Model</i>)
BIC	Бајесов информациони критеријум (енг. <i>Bayesian Information Criterion</i>)
CDF	Кумулативна функција расподеле (енг. <i>Cumulative Distribution Function</i>)
CF	Карактеристична функција (енг. <i>Characteristic Function</i>)
CLT	Централна гранична теорема (енг. <i>Central Limit Theorem</i>)
CVM тест	Крамеров фон Мисисов тест (енг. <i>Cramèr von Mises Test</i>)
ECF	Емпиријска карактеристична функција (енг. <i>Empirical Characteristic Function</i>)
ENFSI	Европска мрежа института форензичких наука (енг. <i>The European Network of Forensic Science Institutes</i>)
FEE	Фракциона грешка оцене (енг. <i>Fractional Estimation Error</i>)
FSEE	Фракциона стандардна грешка оцене (енг. <i>Fractional Standard Estimation Error</i>)
Fuzzy AHP	Fuzzy аналитички хијерархијски процес (енг. <i>Fuzzy Analytical Hierarchy Process</i>)

GARCH	Генерализована ауторегресивна условна хетероскедастичност (енг. <i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>)
GL модел	Уопштени логистички (регресиони) модел (енг. <i>Generalized Logistic model</i>)
GSB процес	Уопштени STOPBREAK процес (енг. <i>Generalized STOPBREAK process</i>)
HPM	Метод хомотопских пертурбација (енг. <i>Homotopy Perturbation Method</i>)
HQIC	Ханан-Квинов информациони критеријум (енг. <i>Hannan-Quinn Information Criterion</i>)
KS тест	Колмогоров-Смирнов тест (енг. <i>Kolmogorov–Smirnov Test</i>)
IBIS	Интегрисани систем за балистичку идентификацију (енг. <i>Integrated Ballistic Identification System</i>)
IID	Идентична независна расподела (енг. <i>Identical Independent Distribution</i>)
ISE	Интегрисана квадратна грешка (енг. <i>Integrated Squared Error</i>)
MAD	Максималне разлика апроксимација (енг. <i>Maximal Approximation Difference</i>)
MAE	Максимална апсолутна грешка (енг. <i>Maximal Absolute Error</i>)
MC метод	Монте Карло метод (енг. <i>Monte Carlo Method</i>)
MCA модел	Математички модел криминалних активности (енг. <i>Mathematical Model of Criminal Activities</i>)
MFE	Максимална фракциона грешка (енг. <i>Maximal Fractional Error</i>)
ML метод	Метод максималне веродостојности (енг. <i>Maximum Likelihood Method</i>)
MoM	Метод момената (енг. <i>Method of Moments</i>)
MSEE	Средње квадратна грешка оцене (енг. <i>Mean Squared Estimatuon Error</i>)
PAR модел	Пропорционални ауторегресивни модел (енг. <i>Proportional Auto-Regressive Model</i>)
PDF	Функција густине вероватноће (енг. <i>Probability Density Function</i>)
QHU расподела	Квази-Линдлијева полулогистичка јединична расподела (енг. <i>Quasi-Lindley Half-Logistic Unit distribution</i>)

RMSEE	Коренована средња квадратна грешка оцене (енг. <i>Root Mean Square Error of Estimation</i>)
RV	Случајна променљива (енг. <i>Random Variable</i>)
SD	Стандардна девијација (енг. <i>Standard Deviation</i>)
SLLN	Строги закон великих бројева (енг. <i>Strictly Low of Large Numbers</i>)
Split-BREAK процес	„Подељени“ STOPBREAK процес (енг. <i>Split-BREAK Process</i>)
Split-MA процес	„Подељени“ процес покретних просека (енг. <i>Splitting Moving Average Process</i>)
STOPBREAK	Стохастички перманентни прекид (енг. <i>STOchastic Permanent BREAK</i>)
VAR	Векторска ауторегресија (енг. <i>Vector Auto-Regression</i>)
ГИС	Географски информациони систем
ДНК	Дезоксирибонуклеинска киселина
КД	Кривично дело
МВ метод	Метод максималне веродостојности
МА модел	Модел покретних просека (енг. <i>Moving Average model</i>)
МУП РС	Министарство унутрашњих послова Републике Србије
ОДЈ	Обична диференцијална једначина
ПДЈ	Парцијална диференцијална једначина
ЦГТ	Централна гранична теорема

СПИСАК ТАБЕЛА

Табела 2-1. Примери везе форензичке интелигенције са истрагама.....	61
Табела 3-1. Преглед основног скупа података о евидентираним КД у МУП РС за период 2015-2024. године.....	64
Табела 3-2. Преглед дескриптивних статистичких података посматраног узорка.....	66
Табела 3-3. Преглед броја и учесталости КД у периоду 2015-2024.....	66
Табела 3-4. Преглед дескриптивних података за одређена КД у посматраном узорку (месечни ниво).....	69
Табела 3-5. Преглед процентуалне заступљености КД у посматраном узорку према територијалној дистрибуцији.....	75
Табела 4-1. MAD, MAE и MFE вредности НРМ апроксимација (Серија А за $\alpha(x) = 1$ и $\gamma = 0,25$).....	101
Табела 4-2. MAD, MAE и MFE вредности НРМ апроксимација (Серија В за $\alpha(x) = 1$ и $\gamma = 0,5$).....	104
Табела 4-3. Вредности грешака НРМ апроксимација ckt и bkt када је $k = 0,1,2,3,4,5$	109
Табела 5-1. Дескриптивна статистика и резултати AN тестирања процењених средњих вредности. (Дужина серије је $n = 150$, праве вредности параметара су $\mu_0(1) = 0$, $\mu_0(2) = 1$.)	147
Табела 5-2. Резултати дескриптивне статистике и AN тестирања оцењених параметара. (Дужина серије је $T = 150$, а праве вредности параметара $\rho \approx 0,3967$, $\sigma_{12}^2 = 1$, $\sigma_{12}^2 = 4$, $\rho = 0,5$.).....	148
Табела 5-3. Резултати дескриптивне статистике и AN тестирања оцењених параметара. (Дужина серије је $T = 500$, а праве вредности параметара исте као у табели 5-2.).....	149
Табела 5-4. Резултати дескриптивне статистике и AN тестирања процењених вредности параметара. (Дужина серије је $T = 1500$, а стварне вредности параметара су исте као у табелама 5-2 и 5-3.)	149
Табела 5-5. Основна статистика везана за серије А и В у посматраном узорку.	153
Табела 5-6. Процењене вредности параметара 2D-GSB процеса.	154
Табела 5-7. Вредности оцене параметара 2D-GSB модела.	156
Табела 5-8. Сумарне статистике, грешке у оцени и AN тестирање оцена параметара QNHU-PAR(1) процеса. (Праве вредности параметара су: $\rho = 0,7$, $\lambda = 5$, $\theta = 0,5$.)	179
Табела 5-9. Сумарна статистика опсервираних података о криминалу.....	183

Табела 5-10. Процењени параметри модела и мере доброте подударања за три конкурентне QNU–PAR(1) спецификације.....	185
Табела 6-1. Процена времена потребног за примену форензичких метода у посматраном узорку	192
Табела 6-2. Процена времена потребног за примену форензички метода према обиму у посматраном узорку (дани)	200

СПИСАК СЛИКА

Слика 2-1. Графички приказ реализација основних компоненти GSB процеса	43
Слика 2-2. Форензичко аналитички циклус предложен у дисертацији	51
Слика 3-1. Преглед броја КД у посматраном узорку према територијалној дистрибуцији	64
Слика 3-2. Приказ заступљености кривичних дела крађе (КД 203) и тешке крађе (КД 204) у посматраном скупу података (дневни ниво)	67
Слика 3-3. Приказ односа учесталости КД по чл 203 и 204 према укупном броју евидентираних КД (месечни ниво).....	68
Слика 3-4. Збирни приказ КД везаних за фалсификовање (месечни ниво).....	68
Слика 3-5. Дистрибуција извршења дела (КД 203, КД204) према времену у току дана у посматраном узорку: (а) појединачно, (б) збирно	70
Слика 3-6. Дистрибуција извршења дела (КД241-244 и КД355-357) према времену у току дана у посматраном узорку: (а) појединачно, (б) збирно	71
Слика 3-7. Дистрибуција извршења дела према времену у току дана у посматраном узорку	72
Слика 3-8. Приказ просторне дистрибуције учесталости КД у посматраном узорку ...	76
Слика 3-9. Приказ просторне дистрибуције КД у посматраном периоду (1 тачка – 100 КД)	79
Слика 4-1. Лево: Експоненцијална конвергенција решења МСА система када је $a > 0$. Десно: Спирална конвергенција ових решења када је $a = 0$. Извор: (Стојичић, С. и сар., 2025).....	88
Слика 4-2. Дијаграми изнад: НРМ апроксимације решења МСА система на интервалу $x \in (0,1)$. Дијаграми испод: Апроксимације решења МСА система на интервалу $t \in (0, +\infty)$. (Серија А са вредностима $\alpha(x) = 1$ и $\gamma = 0,25$.) Извор: (Стојичић, С. и сар., 2025)	100
Слика 4-3. Дијаграми изнад: НРМ апроксимације решења МСА система на интервалу $x \in (0,1)$. Дијаграми испод: Апроксимације решења МСА система на интервалу $t \in (0, +\infty)$. (Серија В са вредностима $\alpha(x) = 0$ и $\gamma = 0,25$.) Извор: (Стојичић, С. и сар., 2025)	103
Слика 4-4. Временске серије броја кривичних дела извршених у Републици Србији, посматране на дневном нивоу (а) и квартално (б). Извор: (Стојичић, С. и сар., 2025).....	106

Слика 4-5. Апроксимације серија $c(t)$ и $b(t)$ коришћењем предложене НРМ процедуре. Извор: (Стојичић, С. и сар., 2025).....	109
Слика 5-1. Дијаграми изнад: Динамика нестационарних компоненти 2D-GSB процеса. Остали дијаграми: Аутокорелационе функције нестационарних компоненти. (Вредности параметра су $\mu = 0, \sigma_{12} = \sigma_{22} = 1, \rho = 0,6$ и $c \approx 3,8$).....	119
Слика 5-2. Поређење функција густине вероватноћа (а) и модула карактеристичних функција (б) пондерисане и стандардне χ^2_{22} расподеле. (Вредности параметара су: $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$ и $\rho = 0,8$, што имплицира да је $\lambda_1 \approx 0,263, \lambda_2 \approx 2,737$)......	124
Слика 5-3. Конвергенције модула карактеристичних функција биваријантних случајних величина $t - 1/2\mu t$ (а) и $t - 1/2Yt$ (б), за $t = 1, 2, \dots, 50$. (Вредности параметара су: $\rho c = 0,4, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ и $\rho = 0,6$)......	128
Слика 5-4. Модули карактеристичних функција за дводимензионалне случајне променљиве $Mt; \alpha$ и $Ut; \alpha$, са различитим вредностима $\alpha > 0$ и временским хоризонтом $t = 50$. (Вредности параметара су исте као на претходној Слици 5-3).....	131
Слика 5-5. 3D приказ асимптотских варијанси оцене μn (а) и оцене μn (б), у зависности од параметра $\rho c \in (0,1)$ и величине узорка $n > 0$	145
Слика 5-6. Q-Q приказ емпиријских расподела МоМ оцена $\rho c, \sigma_{12}, \sigma_{22}$, и ρ , добијених из $S = 300$ Монте Карло репликације 2D-GSB процеса са величином узорка $n = 1500$. 150	
Слика 5-7. Q-Q приказ емпиријске расподеле ECF оцене $\rho c, \sigma_{12}, \sigma_{22}$, и ρ , засновано на $S = 300$ Монте Карло репликације са величином узорка $n = 1500$	151
Слика 5-8. Динамика учесталости два типа КД крађа (а) и фалсификовања (б) у посматраном узорку.....	152
Слика 5-9. Емпиријска расподела стационарне серије прираштаја (приказане хистограмом) заједно са одговарајућим функцијама густине расподеле добијене применом VAR(1) и 2D-GSB модела (приказани линијама).....	157
Слика 5-10. Емпиријске расподеле података о динамици посматраних КД (хистограми) и њима одговарајуће функције густине вероватноће (линије), добијене помоћу 2D-GSB модела и предложене естимационе процедуре.....	159
Слика 5-11. Реализација QNHU-PAR(1) процеса (а) и одговарајућа узорачка и теоријска аутокорелација (б). Вредности параметара су: $\lambda = 5, \theta = 0,5, \rho = 0,7$	170
Слика 5-12. Стационарне густине QNHU-PAR(1) процеса за различите конфигурације параметара: (а) Утицај параметра облика λ , када је $\theta = 1, \rho = 0,7$. (б) Утицај параметра скалирања θ , за $\lambda = 3, \rho = 0,15$. (с) Улога параметра перзистенције ρ , када је $\lambda = 5, \theta = 0,5$	172

Слика 5-13. Q-Q графикони оцењених параметара заснованих на $S = 200$ MC симулација узорка дужине $T = 1500$. (Праве вредности параметара су исте као у табели 5-8.).....	180
Слика 5-14. Лево: Временске реализације QNU-PAR(1) процеса са различитом величином узорка $T \in 150, 500, 1500$. Десно: Емпиријске расподеле (хистограми) посматраног процеса заједно са уклопљеном стационарном густином. (Праве вредности параметара су исте као у Табели 5-8.).....	181
Слика 5-15. Лево: Временске реализације QNU-PAR(1) процеса са различитим величинама узорка $T \in 150, 500, 1500$. Десно: Емпиријске дистрибуције (хистограми) посматраног процеса заједно са приказаном стационарном густином.....	187
Слика 6-1. Општа шема примене форензичко-инжењерских метода.....	191
Слика 6-2. Приказ везе развијених модела и концепта форензичке интелигенције ...	215

1. УВОД

Криминалитет као сложен друштвени феномен представља значајан изазов са аспекта форензичке анализе, јер захтева не само описивање појава, већ и идентификацију образаца, механизма и услова њиховог настанка. Савремени облици криминалних активности карактеришу се динамичношћу, варијабилношћу и израженом стохастичком природом, што значајно отежава њихову анализу, предикцију и превенцију. У таквим условима, традиционални приступи, засновани искључиво на дескриптивним и емпиријским методама, показују ограничења, нарочито у контексту форензичке праксе, где је неопходно доносити одлуке благовремено и често на основу непотпуних и хетерогених података.

Развој математичког моделовања у области криминалитета (Lacey & Tsardakas, 2016; Tsardakas, 2021; Nuño, Herrero, & Primicerio, 2011) омогућио је увођење формалних, аналитичких и предиктивних приступа у проучавању ових појава. Посебно је значајна примена стохастичких процеса и динамичких система (Short, и други, 2008; Mohler, Short, Brantingham, Schoenberg, & Tita, 2011), који омогућавају описивање временске и просторне еволуције криминалних активности, као и идентификацију закономерности, које нису непосредно уочљиве у емпиријским подацима. У том контексту, математички модели криминалних активности¹ не представљају само теоријске конструкције, већ и потенцијалне алате за подршку форензичкој анализи, извођењу закључака и доношењу одлука, чиме се, између осталог, омогућава симулација различитих сценарија, откривање предиктивних трендова, планирање безбедносних акција и процена њихове ефикасности (Short, Möhler, Brantingham, & Tita, 2014; D'Angelo, Payares, Adelfio, & Mateu, 2022; Ghasemi, 2021).

Ова докторска дисертација бави се развојем и применом математичко-стохастичких модела у функцији анализе криминалних активности, са посебним акцентом на њихову примену као алата за подршку форензичким поступцима. Истраживање је усмерено на формализацију и анализу динамике одређених облика кривичних дела, који су релевантни за примену метода форензичког инжењерства, уз коришћење реалних података о регистрованим кривичним делима у евиденцији Министарства унутрашњих послова Републике Србије у периоду од 2015. до 2024. године.

¹У складу са општеприхваћеном енглеском скраћеницом термина *Mathematical Models of Criminal Activities*, ове моделе у даљем тексту краће називамо *МСА модели*.

Полазећи од постојећих теоријских оквира, у раду се развијају и анализирају две основне класе модела:

- *детерминистички модели* засновани на системима обичних и парцијалних диференцијалних једначина, који омогућавају описивање структурних закономерности у динамици криминалних активности,
- *стохастички модели*, који интегришу елементе случајности и омогућавају анализу флукуација, варијација и непредвидивих промена у посматраним процесима.

Посебан акценат стављен је на развој и примену модификованих стохастичких процеса, укључујући генерализовани STOPBREAK (GSB) процес² и пропорционални ауторегресивни (PAR) модел³, као и њихову примену у анализи динамике криминалитета. Интеграција детерминистичког и стохастичког приступа омогућава свеобухватнији опис посматраних појава, чиме се обезбеђује поузданија основа за интерпретацију резултата у форензичком контексту.

Наиме, добро је познато да савремене форензичке истраге све више зависе од анализе великих количина података о криминалним активностима. Иако се у пракси широко примењују различите форензичке методе за анализу материјалних трагова, много мање пажње посвећено је математичком описивању динамике самих кривичних дела. Управо тај јаз између форензичке праксе и математичког моделовања представља полазиште ове дисертације.

Важан допринос овог истраживања огледа се и у повезивању математичког моделовања са практичним захтевима форензичке анализе. Добијени модели се не посматрају искључиво као формални системи, већ као алати који омогућавају идентификацију образаца криминалних активности, процену ризика и подршку у доношењу одлука у процесу спровођења форензичких поступака. На тај начин, дисертација доприноси развоју форензичке аналитике као интердисциплинарне области која повезује математичке методе, статистику и практичну примену у области безбедности.

² Реч је о скраћеницама следећа два енглеска термина: Stochastic Permanent BREAK (STOPBREAK), односно, General STOPBREAK (GSB) process.

³ Слично претходном, овде је реч о скраћеници енглеског термина: Partial AutoRegressive (PAR) process.

1.1 ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА

Као што је већ истакнуто, предмет истраживања у овој докторској дисертацији јесте развој и примена математичко-стохастичких модела који омогућавају квантитативну анализу и подршку форензичком одлучивању и осталим форензичким поступцима. У ту сврху, истраживање је усмерено на оне облике криминалитета, који су релевантни за примену метода форензичке анализе, односно за које постоји потреба за идентификацијом образаца, реконструкцијом догађаја и доношењем оперативних одлука. Форензичка анализа представља неопходан фактор у спровођењу истрага различитих облика криминалитета, јер омогућава, између осталог, прикупљање материјалних доказа, реконструкцију кривичног дела и идентификацију починилаца. У свим овим областима од посебног је значаја примена метода који омогућавају идентификацију образаца, откривање законитости и оптимизацију поступака истраге. У том контексту, математички модели који се овде посматрају омогућавају структурирање и анализу сложених података, са циљем издвајања информација од значаја за форензичку интерпретацију. Посебан акценат стављен је на анализу временске и просторне динамике криминалних активности, као и на идентификацију међусобних зависности између различитих категорија кривичних дела.

1.2 ЦИЉЕВИ ИСТРАЖИВАЊА

Основни циљ овог истраживања јесте да се побољша свеобухватно разумевање динамике криминала, чиме се даје допринос ефикаснијој примени метода форензичког инжењерства, кроз оптимизацију ресурса за њихово спровођење, времена ангажовања, односно убрзања самих истражних процеса. Самим тим, ова дисертација би требало да да допринос у смислу ефикасније употребе форензичко-инжењерских анализа за расветљавање одређених кривичних дела, а самим тим и омогући боље прилагођавање већ постојећих, као и коришћење нових модела који би омогућили успешније моделовање и допринели предикцији криминалних активности у Републици Србији.

С друге стране, један од циљева овог истраживања јесте развој математичко-стохастичких модела који омогућавају квантитативну подршку форензичкој анализи криминалних активности, укључујући идентификацију образаца, процену ризика и

оптимизацију примене форензичких ресурса. У складу са тим, дефинисани су следећи специфични циљеви:

- анализа података о криминалним активностима и идентификација карактеристичних образаца;
- развој детерминистичких модела заснованих на диференцијалним једначинама и анализа њихових својстава;
- развој и примена стохастичких (GSB и PAR) модела прилагођених специфичностима посматраних података;
- оцењивање параметара модела и валидација на основу реалних података и нумеричких симулација;
- успостављање формалне везе између математичких карактеристика модела и информација које су релевантне за форензичко одлучивање ;
- интерпретација резултата у форензичком контексту и анализа њихове применљивости у пракси;
- испитивање могућности примене модела у процесу доношења одлука и оптимизације ресурса у форензичким поступцима.

1.3 Хипотетички оквир. Методе истраживања

Уопштено посматрано, математички модели могу допринети процесима анализе, закључивања и доношења одлука у форензичком домену (смањењу неизвесности), као и унапређењу организације рада и оптимизације коришћења ресурса. Стога су сублимиране полазне хипотезе ове дисертације следеће:

1. Математичко-стохастички модели омогућавају идентификацију образаца криминалних активности који су релевантни за форензичку анализу.
2. Примена предложених модела омогућава унапређење предикције и раног откривања ризичних криминалних појава.
3. Предложени модели омогућавају квантитативну подршку у доношењу одлука у форензичкој пракси.
4. Интеграција детерминистичких и стохастичких приступа обезбеђује поузданије резултате у односу на појединачне приступе.

5. Квантитативни показатељи добијени предложеним моделима могу представљати основу за планирање форензичких активности и рационалније коришћење форензичких ресурса.

У складу са темом, предметом и циљевима истраживања, у докторској дисертацији примењен је широк спектар различитих научноистраживачких метода и поступака. Са аспекта математичког моделовања, примењене методе могу се, у складу са природом посматраних процеса, систематизовати у две основне групе:

- *Методе детерминистичког моделовања* заснивају се на формализацији динамике посматраног система помоћу система обичних и парцијалних диференцијалних једначина. У оквиру овог приступа примењују се методе математичке анализе за испитивање егзистенције и јединствености решења, као и анализа стабилности и асимптотског понашања система. За добијање апроксимативних аналитичких решења нелинеарних система примењује се *метод хомотопских пертурбација (НРМ)*, док се адекватност добијених апроксимација проверава применом одговарајућих мера грешке и поређењем са решењима посматраног система. Ове методе су у дисертацији примењене у развоју и анализи *МСА модела*, који представља математички модел динамике криминалних активности.
- *Методе стохастичког моделовања* примењују се ради обухватања случајности, варијабилности и неизвесности присутних у динамици криминалних активности. У овом делу истраживања примењују се методе анализе временских серија и стохастичких процеса, као и одговарајуће методе оцено параметара и статистичке анализе. Посебно су за оцено параметара примењени *метод момената (МоМ)*, *метод заснован на емпиријској карактеристичној функцији (ECF)* и *метод максималне веродостојности (ML)*, у зависности од карактеристика посматраног процеса. За испитивање статистичких својстава и понашања оцена примењене су нумеричке и *Монте Карло симулације*, док су адекватност и перформансе предложених приступа процењиване применом статистичких тестова, мера грешке и информационих критеријума, као и поређењем са одговарајућим референтним моделима. У оквиру овог приступа развијени су и примењени *2D-GSB* и *QHU-PAR(1)* модели.

1.4 ОСТВАРЕНИ РЕЗУЛТАТИ

Резултати који су добијени овим истраживањем доприносе побољшавају свеобухватног разумевања динамике криминала, доприносе ефикасности примене метода форензичког инжењерства, као и оптимизацији ресурса за њихово спровођењем, а самим тим доприносе ефикасности спровођења истрага и смањењу безбедносних ризика. То уједно доприноси и смањењу потрошње материјала и времена ангажовања, чиме се омогућава убрзање процеса истрага. Тиме се такође даје допринос употреби форензичко-инжењерских анализа за осветљавање одређених кривичних дела и омогућава боље прилагођавање већ постојећих. На тај начин, резултати истраживања дају допринос установљавању законитости, међусобне условљености и сагледавању динамичких особина одређених кривичних дела. Све то може допринети побољшању организације рада форензичких стручних служби, пре свега у доношењу одлука о ангажовању, припреми и потребама одређених техничко-технолошких средстава потребних за форензичку анализу тих дела.

Кроз статистичку анализу података о криминалним активностима у посматраном узорку истраживана је динамика различитих облика криминалитета. На основу анализе постојећих модела и метода, предложен је математички модел криминалних активности (МСА модел), заснован на систему диференцијалних једначина, који може да опише динамику различитих облика кривичних дела. Потом је разматрана могућности да се предложени детерминистички модел прошири неким од стохастичких алтернатива, како би се боље анализирао случајност у настанку и начину извршења кривичних дела. Оцењивање параметара ових модела извршено је на основу узорка који чине подаци о криминалитету, а затим су, кроз нумеричке симулације и анализу стабилности добијених модела, утврђене њихове перформансе, а у циљу обезбеђивања усаглашености са уоченим обрасцима криминалних активности.

Кроз избор адекватних модела такође је извршено испитивање њихових могућности за предикцију различитих облика криминалног деловања, при чему су она изабрана према њиховој учесталости и потреби за применом форензичко-инжењерских анализа. Притом, целокупно истраживање је спроведено над стварним, реалним подацима, док је сама валидација предложених модела спроведена на неколико начина, од којих су најважнији следећи:

- поређење добијених теоријских резултата са реалним подацима о криминалитету на посматраном узорку (у временском периоду од 2015. до 2024. године),
- нумеричке симулације, анализу стабилности и упоредну процену квалитета различитих модела,
- квалитативну и квантитативну анализу примене у форензичким контекстима.

На овај начин, истраживање комбинује теоријске, математичке технике са емпиријским подацима, што представља интегрални приступ и повећава применљивост добијених резултата у пракси.

1.5 СТРУКТУРА РАДА

Ова докторска дисертација је структурисана у више међусобно повезаних целина које обухватају теоријски оквир, методологију, развој модела, емпиријску анализу и форензичку интерпретацију резултата. Прецизније речено, она се састоји из осам међусобно повезаних целина, које систематично воде од мотивације до развоја модела и њихове практичне примене:

1. **Увод** – представља мотивационо поглавље у којем су описани предмет и циљеви истраживања, научни и друштвени значај теме, хипотезе, методолошки приступ и остварени резултати.
2. **Теоријски оквир** – обухвата теоријски аспект математичког моделовања криминалитета, примену форензичко-инжењерских анализа у спровођењу истрага кривичних дела, преглед постојећих, односно предложених детерминистичких и стохастичких модела, као и критичку анализу досадашњих приступа. Овај део такође садржи основне дефиниције и појмове из области диференцијалних једначина, стохастичких процеса и временских серија, као и преглед савремених техника коришћених у овом истраживању.
3. **Методологија истраживања и опис података** – детаљно описује приступ и скуп података (кривична дела у Републици Србији у периоду 2015.–2024. године, а на основу евиденције МУП РС), класификацију облика криминалитета, поступке формализације модела, као и временску и просторну дистрибуцију посматраних кривичних дела.

4. **Детерминистички модел криминалних активности** – приказује примену обичних и парцијалних диференцијалних једначина у моделовању динамике криминалитета, са посебним акцентом на примену метода хомотопских пертурбација (HPM⁴–а) и просторно-временску анализу добијених резултата.
5. **Стохастички модели динамике криминалитета** – бави се оригиналним модификацијом GSB и PAR процеса, увођењем дводимензионалног (2D-GSB) и QNHU⁵-PAR(1) модела, као и њиховом применом на реалне податке.
6. **Форензичка интерпретација и примена модела** – садржи квалитативну и квантитативну анализу добијених модела, њихово поређење са стварним стопама криминалитета, као и практичне импликације у домену предикције и превенције.
7. **Закључак** – резимира резултате, истиче научни допринос, ограничења истраживања и предлоге за будућа истраживања.
8. **Литература** – систематски преглед релевантних извора, са посебним нагласком на радове из области математичког моделовања и форензике.

⁴ Реч је о скраћеници енглеског термина: Homotopy Perturbation Method (HPM).

⁵ И овде је реч о скраћеници енглеског термина: Quasi-Lindley Half-logistic Unit (QNHU) модел.

2. ТЕОРИЈСКИ ОКВИР

Познато је да су догађаји који представљају предмет форензичких анализа, а нарочито кривична дела, последица сложеног деловања великог броја међусобно повезаних фактора (Tsardakas, 2021; Lacey & Tsardakas, 2016). Начин извршења кривичног дела, околности под којима је извршено, трагови који су настали и њихова просторна и временска повезаност чине јединствен систем. Разумевање околности настанка и поступак расветљавања узрока настанка догађаја захтева систематичан и научно заснован приступ. Због тога савремено форензичко инжењерство, поред класичних метода прикупљања и анализе материјалних трагова, све више користи аналитичке поступке који омогућавају реконструкцију догађаја, проверу постављених хипотеза и објективизацију закључака. У том контексту, математичко моделовање има посебну улогу јер нуди формалан језик и методе за описивање, анализу и предвиђање друштвених појава и процеса. Математички формализми омогућавају да се друштвене појаве преточе у структуре једначина, функција или алгоритама, које не служе само за теоријско разумевање, већ и за практичну примену у различитим областима. Основни задатак у овом контексту јесте да се развију структуре и формализми који описују посматране појаве везане за учесталост извршења кривичних дела и омогуће њихово разумевање, као и процене потребне за ангажовањем форензичких ресурса.

У зависности од природе анализираног догађаја и расположивих података, у форензичким истрагама могу се применити детерминистички и стохастички математички модели. Детерминистички модели заснивају се на познатим физичким, техничким и природним законитостима и користе се у ситуацијама када се сматра да су узрочно-последични односи довољно познати да се ток догађаја може описати без увођења случајних компоненти. Међутим, значајан број кривичних дела и других безбедносно релевантних догађаја за чије расветљавање је потребна примена форензичких метода, одликује се израженом неизвесношћу, случајним варијацијама и сложеним интеракцијама великог броја фактора, услед чега њихова динамика не може бити у потпуности објашњена искључиво детерминистичким приступом. У таквим случајевима примењују се стохастички модели, који омогућавају да се неизвесност формално опише применом теорије вероватноће и статистике (Lindsey, 2003). Стохастички приступ омогућава анализу временске динамике кривичних дела, идентификацију закономерности у њиховом појављивању, процену

вероватноће настанка одређених догађаја и прогнозирање будућих кретања, чиме се пружа научно заснована подршка процесу расветљавања кривичних дела и планирању потребних форензичких капацитета.

Развој савремених стохастичких модела временских серија, укључујући моделе који описују структурне прекиде, перманентне шокове и наглашене флукуације, додатно је проширио могућности форензичке анализе. Њихова примена омогућава да се сложена временска структура евидентираних кривичних дела анализира на систематичан начин, да се издвоје правилности које нису уочљиве класичним форензичким поступцима и да се добијени резултати искористе као подршка доношењу одлука у процесу планирања и спровођења форензичких анализа.

2.1 ПОЈАМ И ВРСТЕ МОДЕЛА

Модел је поједностављена, идеализована или апстрактна представа неког реалног система, процеса или феномена, која се користи ради бољег разумевања, анализе, предвиђања или управљања тим системом. Циљ коришћења модела у одређеној предметној области може бити: да се поједностави стварност, омогући боље разумевање, да се омогући аналитичко или симулационо испитивање, да се омогући предвиђање понашања система под различитим условима, да може да се користи као основа за процену ризика и доношење одлука и др.

За анализу неког система (или појаве) често могу користити различити модели зависно од приступа, критеријума и приоритета постављених циљева примене модела. Према једној од подела (Јовановић, 2022), модели могу бити: физички (када се израђују у облику макета, прототипа и сл.); вербални (када се описују речима, што је често случај у раним фазама приступа примене модела); графички (када се за опис модела користе дијаграми, шеме, и сл.); математички (када се користе математички формализми за опис модела); симулациони (када се израђују рачунарски подржане симулације појаве и стварних процеса); детерминистички (када се користе формализми без утицаја случајности) или стохастички (када се користе елементи случајности и простор вероватноћа). У наставку ће детаљније бити описани математички модели, као основ теоријског оквира овог истраживања, односно детерминистички и стохастички модели који представљају две основне и најважније (под)класе математичких модела.

2.1.1 Математички модели

Значај математичког моделовања огледа се у могућности да се препознају кључни фактори који обликују одређену појаву, као и да се сагледа њихово узајамно дејство. Генерално, математичко моделовање представља снажан инструмент за истраживања у области друштвених наука јер омогућава да се сложени процеси преведу у структуре погодне за анализу и предвиђање. Оно повезује теорију и праксу, отварајући простор за дубље разумевање друштва и ефикасније доношење одлука (Shim, и други, 2002). Значајан део математичког моделовања се односи на анализу појава у којима се неизвесност описује и анализира помоћу случајности и вероватноћа. Основу ових анализа представљају случајне променљиве и њихове расподеле, концепти као што су математичко очекивање, варијанса и корелација. За такве динамичке системе, који се посматрају у односу на временски аспект, користе се стохастички процеси, а кроз њихову примену анализира се како се случајне појаве које се развијају и мењају у току времена (Fuller, 1976; Hamilton, 1994; Lawrence & Lewis, 1992).

Посебна предност математичких модела у проучавању криминалитета огледа се у њиховој способности да формално опишу сложене динамичке односе између појединих категорија кривичних дела, као и да идентификују закономерности које нису непосредно уочљиве у емпиријским подацима (Ozdemir, 2018). Док традиционални приступи често остају на нивоу дескрипције и статистичког приказа, математички модели омогућавају прецизније разумевање унутрашње структуре и механизма који условљавају појаву и развој криминалних активности, а самим тим и потребе за планирањем и применом форензичке експертизе. На овај начин, математички модели најчешће обезбеђују већу прецизност и потпуност у описивању посматраних реалних система. Такви модели описују систем на јасан и недвосмислен начин, при чему се користе унапред познате методологије, као што је конвенционални, математичко-формални приступ и примена строго дедуктивних правила у његовој изградњи. Математички модели могу се класификовати у две основне групе, тј. могу се посматрати као *детерминистички* и *стохастички модели*, које сада описујемо у кратким цртама⁶.

⁶ У даљем тексту ће ова два модела бити детаљније истражена, пре свега са аспекта основног циља истраживања, тј. описивања динамике криминала, а у вези са идентификацијом примене предложених модела у форензичко инжењерским анализама.

2.1.2 Детерминистички и стохастички модели

Као што је већ истакнуто, *детерминистички модели* полазе од претпоставке да је динамика система у потпуности одређена почетним условима и функционалним везама између релевантних обележја (променљивих). У теоријском смислу, детерминистички модели омогућавају јасно сагледавање основних закона промена (еволуције) унутар одређеног, посматраног система (или појаве), као и анализу његове стабилности и дугорочних трендова. Они су најчешће засновани на обичним и парцијалним диференцијалним једначинама, које се овде користе ради формализације основних закона еволуције криминалних активности. На тај начин, *детерминистички модели динамике криминалитета* пружају могућност анализе стабилности, идентификације критичних тачака и симулације дугорочних трендова у анализи различитих облика криминалног деловања.

С друге стране, *стохастички модели* полазе од чињенице да се реални процеси не могу у потпуности описати искључиво детерминистички, јер су по својој природи подложни случајним утицајима. На тај начин, стохастички модели интегришу елементе случајности у формални опис динамике посматраних система, чиме се омогућава да се уоче (правилне или неправилне) варијације, флукуације и промене у понашању посматраних система (појава). Они се најчешће заснивају на методама анализе временских серија и стохастичких процеса (ауторегресивних, процеса променљиве варијансе, модела са структурним прекидима, итд.). У контексту описивања и анализе динамике криминалитета, стохастички модели омогућавају да се идентификују и квантификују случајна одступања од уочених трендова, што је од посебне важности за предикцију и рано откривање ризика, као и процену потребних ресурса који омогућавају адекватан форензички одговор. Њихова примена у спроведеном истраживању омогућава уочавање наглашених флукуација, дисконтинуитета и наглих промена у динамици криминалних активности.

Комбинација детерминистичког и стохастичког приступа пружа најпотпунији оквир за анализу криминалних активности. Детерминистички модели омогућавају да се препознају основне структурне закономерности и дугорочни обрасци, док стохастички модели омогућавају да се узму у обзир случајне компоненте и непредвидљиве појаве. На тај начин, интеграцијом ова два приступа гради се аналитички модел, који истовремено описује *основне трендове и насумична одступања*, што обезбеђује поузданију основу за

разумевање, предикцију у корелацији са потребним ангажовањем форензичких ресурса, планирању и обезбеђивању одговарајућих форензичких капацитета, као и остварити допринос превенцији криминалитета.

У већини математичких модела, а нарочито у стохастичким, кључно питање је да ли се структура модела мења током времена. Ако се односи међу елементима модела мењају у зависности од времена, говоримо о временски променљивом моделу, а у супротном, модел је временски инваријантан. Код динамичких модела, тј. модела који зависе од времена, временска променљива t може имати дискретне (пребројиве) или непрекидне (непребројиве) вредности. У оквиру спроведеног истраживања разматрани су искључиво стохастички модели у дискретном времену, познати као *временске серије*. Још једна важна класификација динамичких модела јесте подела на *линеарне* и *нелинеарне*. Линеарни модели, означени као $\mathcal{L}$, задовољавају принцип суперпозиције: ако су c_1, c_2 константе, а $u_1(t), u_2(t)$ улазне променљиве, тада важи (Јовановић, 2022):

$$\mathcal{L}(c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)) = \mathcal{L}(c_1 u_1(t)) + \mathcal{L}(c_2 u_2(t)).$$

Због своје аналитичке једноставности, линеарни модели су често први избор у моделовању реалних појава. Ипак, у многим случајевима, нарочито када се ради о сложеним друштвеним феноменима попут криминалитета и потребне форензичке експертизе, претпоставка линеарности није одржива. Зато се у овој дисертацији фокус ставља на нелинеарне стохастичко-динамичке моделе, укључујући оригинални дводимензионални генерализовани STOPBREAK (2D-GSB) модел, као и пропорционални ауторегресивни (QNU-PAR) модел, који ће се применити на анализу динамике и дистрибуције различитих облика криминалитета за чије утврђивање узрока и доказивање релевантних чињеница је потребна форензичка експертиза.

У наредном делу наводимо неке од основних појмова и чињеница који су неопходни за правилно разумевање горе наведених (детерминистичких и стохастичких) модела. Најпре ће бити описани неки од основних елемената обичних и парцијалних диференцијалних једначина, које краће означавамо, редом, са ОДЈ и ПДЈ. С тим у вези биће објашњени и услови егзистенције и јединствености њихових решења, као и поступци решавања, пре свега, линеарних ОДЈ првог реда. На тај начин омогућава се касније формирање детерминистичког модела динамике криминала (МСА модела), који је детаљно описан у

наредном поглављу ове дисертације. Затим ће бити наведени и неки од најзначајнијих појмова и чињеница теорије вероватноћа, односно теорије стохастичких процеса и временских серија, који се користе у дефинисању раније наведених 2D-GSB и QNU-PAR модела, као два основна стохастичка модела динамике криминалитета о којима ће бити речи у петом поглављу ове дисертације.

2.2 ОБИЧНЕ И ПАРЦИЈАЛНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Диференцијалне једначине се често користе за описивање математичких модела у великом броју проблема, и то не само у природним и техничким наукама, већ и у областима друштвених наука. У контексту форензичких анализа које ће овде бити истражени, системи диференцијалних једначина, који омогућавају формално описивање промена интензитета криминалних активности у времену, као и анализу ефеката различитих унутрашњих и спољашњих фактора на динамику криминалитета. Из тих разлога, у овом делу су приказани основни појмови и термини који се односе на диференцијалне једначине, као и неке од основних поступака њиховог решавања.

2.2.1 Основни појмови и дефиниције

Уопштено речено, диференцијална једначина представља једначину која садржи један или више извода одређене непознате функције, а која може садржати и ту непознату функцију, као и друге познате функције. Прецизнија, формална дефиниција појма диференцијалне једначине може се дати на следећи начин:

Дефиниција 2.1. Диференцијална једначина n -тог реда јесте једначина облика:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

где је F позната функција са $n + 2$ променљиве, x је независна променљива, $y = y(x)$ је непозната функција, а $y', y'', \dots, y^{(n)}$ њени изводи.

Диференцијална једначина у којој непозната функција (y) представља функцију само једне променљиве (x) назива се *обична диференцијална једначина (ОДЈ)*. С друге стране, код *парцијалне диференцијалне једначине (ПДЈ)* непозната функција зависи од две или више променљивих.

Дефиниција 2.2. *Линеарна диференцијална једначина n -тог реда је диференцијална једначина облика:*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (2.2)$$

где су $p_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ и $f(x)$ познате функције.

Ако у једначини (2.2) важи $f(x) = 0$, онда се она назива хомогена линеарна ОДЈ n -тог реда. У супротном је реч о нехомогеној линеарној ОДЈ n -тог реда.

Дефиниција 2.3. *Функција $y = y(x)$ представља решење диференцијалне једначине (2.1) на интервалу (a, b) ако је она дефинисана и n пута непрекидно-диференцијабилна на том интервалу, а притом важи:*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Једноставније речено, свака функција $y = y(x)$ која задовољава дату диференцијалну једначину назива се *решење диференцијалне једначине*. У наставку ће искључиво бити речи о диференцијалним једначинама првог реда, које се, према Дефиницији 2.1, могу представити у општем облику:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2.3)$$

Притом, нагласимо да се извод y' обавезно јавља у диференцијалној једначини (2.3).

Дефиниција 2.4. *Фамилија функција $y = y(x, C)$ је опште решење диференцијалне једначине (2.3) ако постоји скуп $A \subset \mathbb{R}$ такав да за свако $C \in A$ функција $y = y(x, C)$, представља решење ове диференцијалне једначине.*

Другим речима, опште решење диференцијалне једначине првог реда представља фамилију решења која зависе од једног параметра, а може се такође записати и у имплицитном облику $U(x, y, C) = 0$.

Дефиниција 2.5. *Партикуларно решење диференцијалне једначине је свако њено решење које се добија из општег решења за неку, конкретну вредност параметра C . Сингуларно решење једначине је њено решење које се не може добити из општег ни за једну вредност параметра C .*

У наставку описујемо још један важан појам у вези са решавањем диференцијалних једначина. Реч је о тзв. *Кошијевим*⁷ *проблемима*, под којима подразумевамо *почетне проблеме* за решавање диференцијалних једначина, односно проблеме у којима се тражи решење диференцијалне једначине уз унапред задате почетне услове.

Дефиниција 2.6. *За диференцијалну једначину првог реда, дату једначином (2.3), Кошијев проблем (у нормалном облику) гласи: Наћи решење диференцијалне једначине:*

$$y' = f(x, y) \quad (2.4)$$

које задовољава услов:

$$y(x_0) = y_0, \quad (2.5)$$

где су x_0 и y_0 дате (почетне) вредности.

Израз (2.4) се назива *нормални облик* ОДЈ првог реда, док се услов (2.5) обично назива *Кошијев* или *почетни услов*. Приметимо да се сва решења једначине (2.4) добијају интеграцијом, при чему поступак решавања зависи од функције $f(x, y)$ и константе интеграције C . Притом, једначина (2.4) може да има тачно једно решење или више решења, што намеће питање о условима под којима важи *егзистенција и јединственост решења Кошијевог проблема*. Ово је посебно значајно, нарочито уколико се диференцијална једначина решава неким од нумеричких метода, о којима ће бити више речи у наставку.

2.2.2 Егзистенција и јединственост решења

Овде у кратким цртама описујемо поступак (приближног) решавања ОДЈ првог реда, познат као *Пикаров итерациони метод*⁸. Посматрајмо опет претходно описани Кошијев проблем, односно ОДЈ првог реда:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2.6)$$

за коју претпоставимо да има јединствено решење:

⁷Барон Огустен-Луј Коши (1789–1857), француски математичар, инжењер и физичар, један је од првих који је ригорозно формулисао и доказивао кључне теореме математичке анализе. Био је такође пионир у анализи сложених поља и допринео бројним темама у математичкој физици, посебно механици континуума.

⁸Пикаров итерациони метод (често: Пикарова итерација) је поступак за приближно решавање диференцијалних једначина, заснован на идеји узастопних апроксимација.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (2.7)$$

За прву апроксимацију решења датог са (2.7) узимамо (константну) функцију $y(x) = y_0$, па помоћу ње одређујемо другу апроксимацију:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt,$$

као и следећу апроксимацију:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt.$$

У општем случају, за n -ту итерацију се добија:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad (2.8)$$

тј. добија се низ апроксимација:

$$y_0, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

који ће конвергирати ка решењу диференцијалне једначине уколико су испуњени услови који обезбеђују егзистенцију и јединственост решења Кошијевог проблема (2.6). Довољне услове за то дају следеће две теореме:

Теорема 2.1 (о егзистенцији решења). *Ако је функција $f(x, y)$ непрекидна у свим тачкама области $D: |x - x_0| < a, |y - y_0| < b$ и ограничена на D , тј.*

$$|f(x, y)| \leq K, \quad (x, y) \in D,$$

тада Кошијев проблем (2.6) има бар једно решење $y = y(x)$, које је дефинисано на интервалу $|x - x_0| < \alpha$ где је $\alpha = \min\{a, b/K\}$ и $K = \sup_D |f(x, y)|$.

Теорема 2.2 (о јединствености решења). *Нека су функције $f(x, y)$ и $\partial f(x, y)/\partial y$ непрекидне у свим тачкама области $D: |x - x_0| < a, |y - y_0| < b$ и ограничене на D , тј.*

$$|f(x, y)| \leq K, \quad (x, y) \in D,$$

при чему постоји константа $L > 0$ таква да је:

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq L, \quad (x, y) \in D.$$

Тада Кошијев задатак (2.6) има тачно једно решење $y = y(x)$ које је дефинисано на интервалу $|x - x_0| < \alpha$, где је $\alpha = \min\{a, b/K\}$ и $K = \sup_D |f(x, y)|$.

Докази претходних двеју теорема се могу наћи, рецимо, у (Teschl, 2022), а због сложености су овде изостављени. Ипак, треба рећи да се решење $y(x)$ Кошијевог проблем (2.6) добија помоћу раније описаног Пикаровог итерационог метода, тј. као гранична вредност низа функција $\{y_n(x)\}$ дефинисаног са (2.8). Такође, истакнимо да су услови у претходној теорему довољни, али не и потребни за постојање јединственог решења у (2.6). Ови услови се могу заменити слабијим, јер на основу познате Лагранжове теореме (Миловановић, Јоксимовић, & Ђорђевић, 2015) важи:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = \frac{\partial f(x, y_c)}{\partial y} (y_2 - y_1),$$

где су $(x, y_1), (x, y_2) \in D$, док је y_c бројевна вредност таква да $y_1 \leq y_c \leq y_2$. Како смо раније претпоставили да је парцијални извод $\partial f / \partial y$ ограничен на скупу D , на основу претходне једнакости добијамо:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad L - \text{const.} \quad (2.9)$$

Услов (2.9) назива се *Липшицов услов* и он јесте слабији од услова ограничености извода $\partial f / \partial y$. На основу тога може се формулисати следећа, позната *Пикар-Линделофова теорема*, чији се доказ може наћи, рецимо, у (Teschl, 2022, стр. 38):

Теорема 2.3 (о егзистенцији и јединствености). Нека је функција $f(x, y)$ непрекидна и ограничена у свим тачкама области $D: |x - x_0| < a, |y - y_0| < b$, при чему она задовољава и Липшицов услов (2.9). Тада Кошијев проблем (2.6) има тачно једно решење $y = y(x)$, које је дефинисано на интервалу $|x - x_0| < \alpha$, при чему је $\alpha = \min\{a, b/K\}$ и $K = \sup_D |f(x, y)|$.

2.2.3 Решавање линеарне диференцијалне једначине

Размотримо сада поступак решавања *линеарне ОДЈ првог реда*, тј. једначине облика:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (2.10)$$

где су $p(x)$ и $q(x)$ познате функције. Најпре одредимо решење тзв. *хомогене једначине*:

$$y' + p(x)y = 0, \quad (2.11)$$

где смо узели да је $q(x) = 0$. За одређивање општег решења једначине (2.11) користимо тзв. *поступак раздвајања променљивих*. Након елементарних трансформација, хомогену једначину (2.11) можемо написати на следећи начин:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad y \neq 0,$$

одакле интеграцијом добијамо:

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

На тај начин, добија се опште решење хомогене једначине:

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Сада, опште решење нехомогене линеарне ОДЈ (2.10) одређујемо *Лагранжовим методом* или *методом варијације параметра*. То значи да ово решење тражимо у облику:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (2.13)$$

где $C(x)$ је непрекидно-диференцијабилна функција. Диференцирањем једнакости (2.13) и њеним уврштавањем у једнакост (2.10) добијамо:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

одакле следи да је:

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

па интеграцијом добијамо:

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

На основу тога, заменом у (2.13) добија се *опште решење линеарне диференцијалне једначине првог реда*:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

На крају, истакнимо да сва решења линеарне ОДЈ првог реда имају тзв. *својство линеарности*, које се релативно лако показује, а може се исказати на следећи начин:

Теорема 2.4. *Ако су функције $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ решења једначине (2.10), онда је и функција $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где су C_1 и C_2 произвољне реалне константе, такође решење те једначине.*

2.3 ХОМОТОПСКО-ПЕРТУРБАЦИОНИ МЕТОД (НРМ)

Као један од основних поступака решавања предложених једначина коришћен је *хомотопско-пертурбациони метод (НРМ)*, који спада у савремену технику решавања нелинеарних диференцијалних једначина различитих облика и форми. НРМ је први пут уведен у пионирским радовима Хија (He J.-H. , 1999; He J.-H. , 2000; He J.-H. , 2003; He J.-H. , 2006; He J.-H. , 2008) и представља комбинацију добро познатих хомотопских метода (He & El-Dib, 2022), које се користе у топологији, заједно са класичним техникама пертурбације. Од свог настанка, НРМ се стално развоја и успешно је примењен у различитим областима научних истраживања, као што је физика (Кевкић & Стојановић, 2019; Кевкић, Стојановић, & Петковић, 2019; Кевкић, Стојановић, & Ранђеловић, 2017), епидемиологија (Adamu, Bawa, Jiya, & Chado, 2017; Khan, Farasat Saddiq, Khan, Islam, & Ahmad, 2014; Noor & Khan, 2012), и разна остала техничко-технолошка истраживања (Стојановић, В. и сар., 2018; Mayilvaganan & Balamuralitharan, 2018; Sharif, Alam, & Molla, 2025; Љајко, Е. и сар., 2021).

2.3.1 Основни принципи НРМ-а

Као илустрацију основних концепата НРМ-а, размотримо најпре следећу нелинеарну једначину:

$$N(f(x)) = 0, \quad (2.15)$$

где је $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непозната функција, а $N(u)$ је нелинеарни оператор дефинисан на неком функционалном домену Ω . При решавању једначине (2.15) помоћу НРМ-а уводи се тзв. *хомотопско пресликавање (хомотопија)* $\mathcal{H}: \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ тако да за свако $u \in \Omega$ важи:

$$\mathcal{H}(u, 0) = L(u), \quad \mathcal{H}(u, 1) = N(u), \quad (2.16)$$

где је $L(u)$ линеарни оператор, дефинисан на истом домену Ω . Прецизније, ако означимо са $p \in [0, 1]$ тзв. *параметар уграђивања*, онда се хомотопија $\mathcal{H}$ може дефинисати као функција:

$$\mathcal{H}(u, p) = (1 - p)L(u) + pN(u) \quad (2.17)$$

која очигледно задовољава обе једначине у (2.16). Према томе, за непознату функцију $f(x)$ можемо формирати тзв. *хомотопску једначину*:

$$\mathcal{H}(f(x), p) = 0, \quad (2.18)$$

Када је $p = 0$, једначине (2.16)–(2.18) дају следећу (линеарну) једначину:

$$L(f(x)) = 0, \quad (2.19)$$

за коју се претпоставља да има јединствено решење $f_0(x)$, обично названо *почетно решење* или *почетна апроксимација*. С друге стране, када је $p = 1$, исте једначине дају нелинеарну једначину (2.15).

Основна претпоставка НРМ-а јесте да се опште решење $F(x, p)$ хомотопске једначине (2.17) може изразити у облику степеног реда (по параметру p):

$$F(x, p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k f_k(x). \quad (2.20)$$

Одавде непосредно следи да је $F(x, 0) = f_0(x)$ решење једначине (2.19), односно хомотопске једначине (2.18) када је $p = 0$. С друге стране, за $p = 1$, као решење „главне“, нелинеарне једначине (2.15), односно њој еквивалентне једначине (2.18), добија се функција облика:

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow 1^-} F(x, p) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad (2.21)$$

под условом да ред у (2.21) конвергира. У том случају, према познатој Абеловој теорему (Zakharov, 2001), непосредно следи:

Теорема 2.5. *Ако ред $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ конвергира, онда је функција $F(x, p)$ непрекидна слева у тачки $p = 1$, тј. важи једнакост (2.21).*

Дакле, ако су испуњени услови претходне теореме, онда ред $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ заиста представља решење хомотопске једначине (2.18), када је $p = 1$. Самим тим, он представља и решење нелинеарне једначине (2.15). Штавише, ово решење може се проценити тзв. *НРМ-апроксимацијама*:

$$\hat{f}_0(x) = f_0(x), \quad \hat{f}_k(x) = \hat{f}_{k-1}(x) + f_k(x) = \sum_{j=1}^k f_j(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Уколико ред $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ конвергира, односно функција $f(x)$, дефинисана једнакошћу (2.21), представља решење једначине (2.15), онда низ $\{\hat{f}_k(x)\}$ очито конвергира ка непознатој функцији $f(x)$. Довољни услови за ову конвергенцију могу се дати и следећим тврђењем, доказаним у (Стојановић & Кевкић, 2018), које представља специјалан случај познате *Банахове теореме о непокретној тачки* (Manna, Rahman, Akter, & Nahar, 2021):

Теорема 2.6. *Нека је дат Банахов простор Ω са суп-нормом $\|\cdot\|$ и низом $\{\hat{f}_k(x)\}$ дефинисаним на Ω једнакостима (2.22). Ако за неко $\alpha \in (0,1)$ и свако $k \geq 1$ важи неједнакост $\|f_k\| \leq \alpha \|f_{k-1}\|$, онда низ $\{\hat{f}_k(x)\}$ равномерно конвергира ка јединственом решењу $f(x)$ једначине (2.15).*

Доказ. Према претпоставкама теореме, као и на основу једнакости (2.22), за свако $k, m > 0$ важи:

$$\begin{aligned} \|\hat{f}_{k+m} - \hat{f}_k\| &\leq \|\hat{f}_{k+m} - \hat{f}_{k+m-1}\| + \dots + \|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\| \\ &\leq \|f_{k+m}\| + \dots + \|f_{k+1}\| \\ &\leq (\alpha^{k+m} + \dots + \alpha^{k+1}) \|f_0\| \\ &\leq \alpha^{k+1} \frac{1 - \alpha^m}{1 - \alpha} \|f_0\|. \end{aligned}$$

Како је $\alpha \in (0,1)$, одавде имамо да је:

$$\lim_{k,m \rightarrow \infty} \|f_{k+m} - f_k\| = 0,$$

тј. $\{\hat{f}_k(x)\}$ је Кошијев низ у Банаховом простору Ω . То имплицира да је $\{\hat{f}_k(x)\}$ равномерно конвергентан, а његова гранична вредност јединствено одређена једнакошћу (2.21). ■

На основу претходне теореме могу се уочити важне предности НРМ-а у решавању различитих нелинеарних проблема. Оне се заснивају на чињеници да примена НРМ-а често

даје брзу конвергенцију, погодну за нелинеарне проблеме, при чему се он једноставно примењује на обичне и парцијалне диференцијалне једначине. На тај начин, примена НРМ техника омогућава ефикасно добијање апроксимација сложених динамичких система, што је посебно значајно у ситуацијама када је потребно брзо анализирати различите сценарије од интереса за планирање форензичког одговора. У наредним поглављима ове дисертације биће детаљно описана практична примена НРМ методологије у решавању већ поменутог детерминистичког (МСА) модела динамике криминалитета који имплицира значајно ангажовање форензичких ресурса.

2.3.2 Кошијеви проблеми у НРМ-у

У контексту методе хомотопских пертурбација, истакнимо да се она може ефикасно применити на различите облике Кошијевих проблема (о којима је било речи у претходном одељку). При раније уведеним ознакама и претпоставкама, дефинишимо Кошијев проблем за нелинеарну једначину (2.15) на следећи начин:

$$N(f(x)) = 0, \quad y_0 = f(x_0), \quad (2.23)$$

где је $x_0 \in \Omega$. Применом једнакости (2.20)–(2.22) лако се може закључити да ће услови дефинисани у (2.23) бити испуњени ако за функцију $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, која представља НРМ решење нелинеарне једначине (2.15), важе следеће једнакости:

$$f_0(x_0) = y_0, \quad f_k(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Дакле, Кошијев проблем (2.23) за једначине облика (2.15), које се решавају применом НРМ техника, своди се на решавање две врсте почетних услова: иницијално НРМ-решење $f_0(x)$ задовољава исте почетне услове као и основно НРМ-решење $f(x)$, док остали чланови НРМ серије $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ задовољавају једнакост $f_k(x_0) = 0$. Истакнимо да ће управо овакав начин одређивања Кошијевог решења ће бити примењен приликом решавања математичког модела криминалних активности (МСА модела) применом НРМ-а.

2.4 STOPBREAK и GSB ПРОЦЕСИ

Стохастички процес перманентног прекида (STOPBREAK процес), први пут је представљен од стране Роберта Енга и Арона Смита (Engle & Smith, 1999), као начин

моделовања временских серија са перманентним и наглашеним флуктуацијама. Након тога, многи аутори су разматрали моделе који се у већој или мањој мери ослањају на концепте STOPBREAK процеса, првенствено у области економетрије (Huang & Fok, 2001; Gonzalo & Martinez, 2006; Bisaglia & Gerolimetto, 2008; Bisaglia & Gerolimetto, 2008; Tzavalis & Kapetanios, 2010; Dendramis, Kapetanios, & Tzavalis, 2014; Dendramis, Kapetanios, & Tzavalis, 2015). Генерализација овог процеса, названа уопштени Split-BREAK (енг. *Generalized Split-BREAK – GSB*) процес, предложена је у радовима (Стојановић, В. и сар., 2014; Стојановић, В. и сар., 2015; Стојановић, Поповић, & Поповић, 2011; Стојановић, В. и сар., 2016; Јовановић, М. и сар., 2022). У овим радовима формално су дефинисана дистрибутивна и асимптотска својства GSB процеса, заједно са различитим методама оцењивања његових параметара. У новије време, неке од модификација GSB процеса, у смислу увођења Лапласових и Кошијевих иновација, дате су у радовима (Стојановић, В. и сар., 2023) и (Љајко, Е. и сар., 2023). Поред тога, GSB процес је практично примењен у различитим аспектима моделовања емпиријских временских серија, као што је, рецимо, динамика цена акција на Београдској берзи, динамика заражених и вакцинисаних против SARS- CoV 19 вируса, и сл.

Основна временска серија GSB процеса дефинисана је следећом једначином:

$$y_t = m_t + \varepsilon_t. \quad (2.24)$$

Овде $t = 0, 1, \dots, T$ означава време, (m_t) је серија мартингалних средњих вредности (мартингалних просека), а (ε_t) су иновације, тј. низови независних идентично расподељених (енг. *Independent Identical Distributed - IID*) Гаусових $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ случајних променљивих, прилагођених некој филтрацији $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$. Према овим претпоставкама, за свако $t = 1, \dots, T$, следи:

$$E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad Var(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2.$$

С друге стране, за мартингалне средње вредности (m_t) претпостављамо да су дефинисане следећом рекурентном релацијом:

$$m_t = m_{t-1} + q_{t-1} \varepsilon_{t-1} = m_0 + \sum_{j=0}^{t-1} q_j \varepsilon_j. \quad (2.25)$$

Овде претпостављамо да је $m_0 \stackrel{\text{as}}{=} \mu$ (const.), $\varepsilon_{-1} = \varepsilon_0 \stackrel{\text{as}}{=} 0$, док је q_t тзв. *индикатор шума*, тј. случајна променљива која зависи од иновација (ε_t), тако да важи:

$$q_t = I(\varepsilon_{t-1}^2 > c) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-1}^2 > c \\ 0, & \varepsilon_{t-1}^2 \leq c. \end{cases}$$

Притом, $c > 0$ представља *критичну вредност реакције*, односно утицај претходних иновација (ε_t) на динамику GSB процеса. Прецизније речено, вредност $q_{t-1} = 0$ указује да нема промене у средњој вредности мартингала m_t , у поређењу са претходном вредношћу m_{t-1} , па ће вредност y_t бити добијена са „малом“ флукуацијом, која зависи само од шума ε_t . У супротном, за $q_{t-1} = 1$ региструје се изражена (перманентна) флукуација серије (y_t). Дакле, ниво претходних реализација серије (ε_t) утиче на степен варијација (y_t), односно указује на интензитет флукуација GSB процеса. На основу једнакости (2.24) следи:

$$E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = m_t + E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = m_t,$$

из чега закључујемо да су реализације серије (y_t) „блиске“ мартингалним средњим вредностима (m_t). Такође, важи:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E[E(y_t | \mathcal{F}_{t-1})] = E(m_t) = E(m_{t-1}) + E(q_{t-1} \varepsilon_{t-1}) \\ &= E(m_{t-1}) \\ &\vdots \\ &= E(m_0) = \mu, \end{aligned}$$

тј. средње вредности серија (y_t) и (m_t) су константне и једнаке.

Претходне једначине описују стохастичку природу GSB процеса, односно адитивне декомпозиције (2.24). Како је серија (m_t) мерљива у односу на поље $\mathcal{F}_{t-1}$, она представља *компоненту предвидљивости и стабилности GSB процеса*. Насупрот томе, серија иновација (ε_t) представља фактор одступања („бели шум“) основне GSB серије (y_t), у односу на мартингалне средње вредности (m_t).

Даље, условну варијансу серије (y_t) одређујемо из једначине:

$$\text{Var}(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(y_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) - m_t^2 = 2m_t E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2,$$

одакле добијамо:

$$\text{Var}(y_t) = E(y_t^2) - \mu^2 = E(m_t^2) + 2E(m_t \varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2) - \mu^2 = \text{Var}(m_t) + \sigma^2.$$

За свако $t = 1, \dots, T$ такође важи:

$$\begin{aligned} \text{Var}(m_t) &= E(m_t^2) - \mu^2 \\ &= E(m_{t-1}^2) + 2E(m_{t-1}q_{t-1}\varepsilon_{t-1}) + E(q_{t-1}^2\varepsilon_{t-1}^2) - \mu^2 \\ &= \text{Var}(m_{t-1}) + a_c\sigma^2, \end{aligned}$$

где је $a_c = E(q_t) = E(q_t^2) = P\{\varepsilon_t^2 > c\}$. Одавде следи да се варијанса мартингалних просека (m_t) , под претпоставком да је $m_0 \equiv \mu$ (const.), може изразити као:

$$\text{Var}(m_t) = ta_c\sigma^2, \quad t \geq 0.$$

Штавише, на основу претходних једнакости се лако добија варијанса основне серије (y_t) :

$$\text{Var}(y_t) = \text{Var}(m_t) + \sigma^2 = (ta_c + 1)\sigma^2, \quad t \geq 0.$$

Дакле, варијансе серија (y_t) и (m_t) имају неконстантне вредности које зависе од временског тренутка у времену (t) у којем се посматрају.

Корелационе функције серија (y_t) и (m_t) могу се добити на сличан начин. Приметимо најпре да за свако $s > t \geq 0$ важи:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(m_t, m_s) &= E(m_t m_s) - \mu^2 = E(m_t m_{s-1}) + E(m_t q_{s-1} \varepsilon_{s-1}) - \mu^2 \\ &= \text{Cov}(m_t, m_{s-1}), \end{aligned}$$

одакле следи да коваријанса серије (m_t) задовољава једнакост:

$$\text{Cov}(m_t, m_s) = \text{Var}(m_t), \quad s > t \geq 0.$$

Одавде се добија корелациона функција мартингалних средњих вредности:

$$\widetilde{\text{Corr}}(s, t) = \frac{\text{Cov}(m_t, m_s)}{\sqrt{\text{Var}(m_t)} \cdot \sqrt{\text{Var}(m_s)}} = \begin{cases} \frac{\min(s, t)}{\sqrt{s \cdot t}}, & s \neq t \\ 1, & s = t. \end{cases}$$

Слично томе, према једнакостима:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y_t, y_s) &= E(y_t y_s) - \mu^2 = E(y_t m_s) + E(y_t \varepsilon_s) - \mu^2 \\ &= E(m_t m_s) + E(\varepsilon_t m_s) - \mu^2 = \text{Cov}(m_t, m_s) + a_c\sigma^2 \\ &= \text{Var}(m_t) + a_c\sigma^2 = \text{Var}(y_t), \quad s > t \geq 0, \end{aligned}$$

може се добити корелациона функција низа (y_t) на следећи начин:

$$\text{Corr}(s, t) = \begin{cases} \frac{a_c \min(s, t) + 1}{\sqrt{(a_c s + 1) \cdot (a_c t + 1)}}, & s \neq t \\ 1, & s = t. \end{cases}$$

Дакле, обе корелационе функције зависе од временских аргумената t, s чиме указују на *нестационарност серија* (y_t) и (m_t) , па ова чињеница захтева неке сложеније технике за испитивање њихових својстава. Такође, треба напоменути да важи:

$$\lim_{s \rightarrow t} \widetilde{Corr}(s, t) = \lim_{s \rightarrow t} Corr(s, t) = 1,$$

тј. корелационе функције обе серије (y_t) и (m_t) задовољавају тзв. услов L^2 -непрекидности.

У наставку, дефинишемо и серију прираштаја GSB процеса:

$$X_t = y_t - y_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.26)$$

Важност ове серије је препозната од стране скоро свих аутора који су проучавали STOPBREAK и GSB процесе. На основу једначина (2.24) и (2.5), серија прираштаја (X_t) се може представити у следећем облику:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_{t-1} \varepsilon_{t-1}, \quad (2.27)$$

где је $\theta_t = 1 - q_t = I(\varepsilon_{t-1}^2 \leq c)$. На тај начин, серија (X_t) је блиска тзв. процесима покретних просека (реда 1), при чему она функционише у два режима:

1. Уколико су флуктуације иновација (ε_t) наглашене у претходном временском тренутку $(t - 1)$, онда је $\theta_{t-1} = 0$, па важи једнакост $X_t = \varepsilon_t$.
2. С друге стране, флуктуације које не прелазе критичну вредност $c > 0$ дају репрезентацију низа (X_t) у облику линеарног МА(1) процеса $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$.

На овај начин, временска серија (X_t) има слична својства као стандардни МА(1) модели, који се стога могу применити у његовом истраживању. Уз раније претпоставке, средња вредност и варијанса ове серије, добијене једноставним рачунањем, гласе:

$$E(X_t) = 0, \quad Var(X_t) = E(X_t^2) = \sigma^2(b_c + 1),$$

где је $b_c = 1 - a_c = P(\varepsilon_{t-1}^2 \leq c)$. Такође, коваријанса овог низа је облика:

$$Cov(X_t, X_s) = \begin{cases} (b_c + 1)\sigma^2, & s = t \\ -b_c\sigma^2, & |s - t| = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

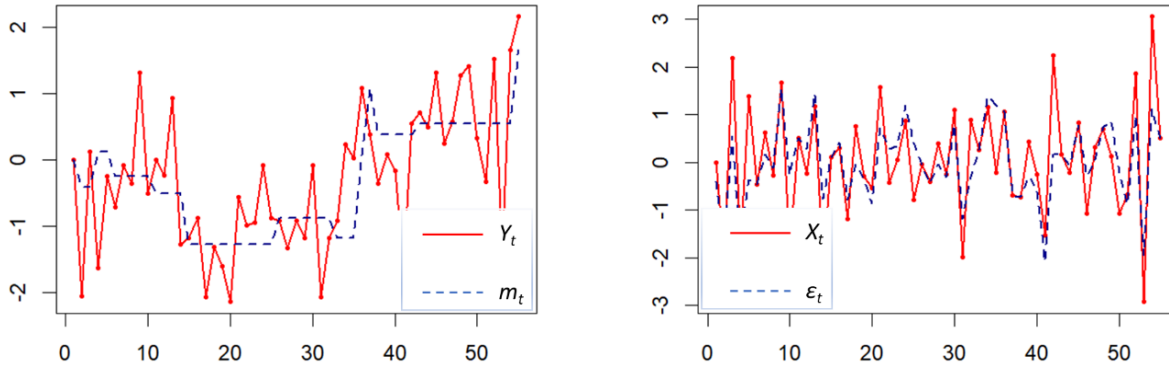
и има идентичну структуру као стандардна МА(1) серија. На основу добијене коваријансе, лако се можемо уочити да је низ (X_t) стационаран и да се његова корелациона функција може записати у облику:

$$\rho_X(h) := \frac{Cov(X_t, X_{t+h})}{Var(X_t)} = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ -b_c/(b_c + 1), & h = \pm 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Најзад, према једначинама (2.26) и (2.27) следи:

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T,$$

што се може интерпретирати као нелинеарни модел ауторегресивног интегрисаног покретног просека (ARIMA модел) са „повременим“ компонентама ($\theta_{t-1}\varepsilon_{t-1}$). Ова једнакост имплицира специфичну структуру серије (X_t), као и осталих компоненти GSB процеса. Као илустрација, на слици 2-1 су приказане реализације свих временских серија добијених Монте Карло симулацијом GSB модела.



Слика 2-1. Графички приказ реализација основних компоненти GSB процеса

На крају овог дела, истакнимо да за разлику од класичних модела временских серија, GSB процес омогућава моделовање наглих структурних промена које се у пракси могу јавити, рецимо, услед појаве нових криминалних образаца, промена начина извршења дела или интензивирања активности одређених криминалних група. Ипак, добро је познато да се многи феномени из стварног света често манифестују у неколико зависних временских серија које делују заједно. У криминолошком контексту, на пример, серије које квантификују крађе и тешке крађе (организоване или насилне) могу бити у корелацији. На сличан начин, заједнички друштвени фактори (промене у економским условима, промена у превентивној и реактивној стратегији полиције, периодичност према сезонским условима) могу истовремено изазвати скокове у обе серије, док свака од њих задржава своју динамику и унутрашња структурна својства.

У том смислу, неки конвенционални модели често не обухватају истовремене прекиде и латентну (скривену) међузависност⁹, док једнодимензионални GSB модел не може експлицитно да моделира истовремену корелацију у две серије. Да би се ово решио овај проблем, у овој дисертацији је предложен дводимензионални, 2D-GSB модел који уводи пар латентних процеса синхронизованих индикатором шума q_t , али са дводимензионалним, корелисаним иновацијама. На овај начин је могуће моделирати уобичајене режиме прекида, међусобну (интер)корелацију, као и појединачне структуре аутокорелације латентних (скривених) и опсервираних серија, о чему ће бити више речи у петом поглављу дисертације.

2.5 ЈЕДИНИЧНЕ РАСПОДЕЛЕ И ПАР МОДЕЛИ

Последњих година све већа пажња посвећује се статистичком моделовању временских серија чије су реализације природно ограничене на јединичном интервалу (0,1). Овакве временске серије одговарају стохастичким процесима који се често јављају у пракси када посматране вредности представљају пропорције, проценте, нормализоване показатеље, вероватноће или релативне односе унутар динамике посматраног система.

2.5.1 Јединичне расподеле

Међу стохастичким расподелама које су предложене у новије време, посебно се истичу оне које су дефинисане на јединичном интервалу (0,1), пре свега због своје корисности у моделовању тзв. пропорционалних података са вредностима на овом интервалу. Подаци који имају вредности на јединичном интервалу, или се могу трансформисати на начин да вредности буду у овом интервалу, често се јављају у областима анализе ризика, психологије, економије, медицине, инжењерства, али и у другим научним областима (Nasiru, Chesneau, & Ocloo, 2024; Alanzi, Rafique, Tahir, Sami, & Jamal, 2022; Nasiru, S.; Abubakari, A. G.; Chesneau, C., 2023).

Полазећи од пионирских резултата који се односе на регресионе моделе са јединичним расподелама (Paolino, 2001; Kieschnick & McCullough, 2003; Ferrari & Cribari-Neto, 2004;

⁹ Корелација или међузависност представља скривену, неопсервирану, узајамну повезаност између двеју или више појава (нпр. временских серија), која није директно видљива у подацима, али постоји и утиче на њихово заједничко понашање

Simas, Barreto-Souza, & Rocha, 2010), у наредном периоду развијени су ауторегресивни модели покретних просека (ARMA модели) са јединичним расподелама (Rocha, A.V.; Cribari-Neto, F., 2009; Rocha & Cribari-Neto, 2017; Bayer, F.M.; Bayer, D.M.; Pumi, G., 2017; Bayer, Cintra, & Cribari-Neto, 2018). Даљи развој ових и других сродних, такозваних двоструко ограничених (енг. *Double Bounded*) модела, указује на могућности њихове широке и репрезентативне примене. Тако, рецимо, неки савремени приступи укључују бета фракционо интегрисане ARMA моделе (Pumi, Valk, Bisognin, Bayer, & Prass, 2019), моделе условних средњих вредности вођене хаотичким процесима (Pumi, Prass, & Souza, 2021), ауторегресивне моделе условних пропорција (енг. *Autoregressive Conditional Proportion Models*) (Aknouche & Dimitrakopoulos, 2023), ауторегресивне моделе са јединичном Вејбуловом расподелом (Pumi, Prass, & Taufemback, 2024), сезонске моделе за податке ограничене на јединичном интервалу (Armanini Stefanan, Sagrillo, Palm, & Bayer, 2025), генерализоване ARIMA моделе (Scher, Cribari-Neto, & Bayer, 2024), као и друге моделе намењене моделовању временских серија са вредностима ограниченим на јединичном интервалу. На овај начин генерисани модели значајно су проширили методолошки алат за моделовање временских података ограничених на јединичном интервалу, а показали су се успешним у применама у различитим областима, попут заштите животне средине, економије, биомедицине и хидрологије (Bayer, Rosa, & Cribari-Neto, 2025; Leiva, Mazucheli, & Alves, 2023).

У теорији вероватноће, јединичне расподеле (енг. *Unit Distributions*) означавају фамилију расподела чији је домен ограничен на јединични интервал $(0,1)$, па се могу користити за моделовање случајних величина које представљају пропорције, учесталост или вероватноће. Оне се првенствено користе као стохастички модели који могу да опишу такозване пропорционалне случајне променљиве. Јединичне расподеле представљају теоријске моделе који могу да се користе за анализу и објашњење понашања неких феномена из стварног света (Hassan, Abdalla, Faal, & Saudi, 2025; Ullrich, 2021; Nasiru, Chesneau, & Ocloo, 2024). У наставку се прецизније описује овај појам, као и још неке важније чињенице у вези са њим.

Дефиниција 2.7. Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задати простор вероватноћа. Случајна променљива $X: \Omega \rightarrow (0,1)$ има јединичну расподелу ако је њена функција расподеле:

$$F_X(x) = P(X < x), \quad x \in (0,1),$$

док функција густине $f_X(x) = dF_X(x)/dx$ има следеће особине:

$$f_X(x) \geq 0, \quad \int_0^1 F_X(x) dx = 1.$$

Као што је већ истакнуто, јединичне расподеле добијају на значају, пре свега због њихове релевантности и применљивости у анализи реалних података. У избору најприкладније расподеле за одређену анализу, јединичне расподеле имају предност са аспекта минимизирања губитка информација и доношења тачних закључака. Стога оне представљају важну класу расподела, као и природан избор за моделовање пропорција и вероватноћа, тако да њихова примена константно расте, нарочито у моделовању временских серија. Управо из тих разлога, оне представљају још један облик стохастичких модела од посебног значаја за анализу реалних података обрађених у овој дисертацији.

Као примере неких од јединичних расподела уведених у новије време, навешћемо следеће: јединична експоненцијална расподела (Bakouch, Н. и сар., 2023), степена $\arctan$ -расподела (Nasiru, S.; Abubakari, A. G.; Chesneau, C., 2023), јединична генерализована полуномална расподела (Mazucheli, Korkmaz, Menezes, & Leiva, 2023), континуирана Бернулијева расподела (Korkmaz, Leiva, & Martin-Barreiro, 2023), инверзно експоненцијална Вајбулова расподела (Lee, Noh, & Chung, 2017), јединична Вајбулова расподела (Mazucheli, Menezes, Fernandes, de Oliveira, & Ghitany, 2019), јединична Вајбулова расподела са горњим ограничењем (Okorie, Afuecheta, & Bakouch, 2023), јединична Гумбелова расподела типа II (Shafiq, Sindhu, Hussain, Mazucheli, & Alves, 2023), генерализована јединична полулогистичка геометријска расподела (Nasiru, Chesneau, Abubakari, & Angbing, 2023), јединична $\log\text{-}\log$ расподела (Korkmaz & Korkmaz, 2021), нова модификована Кумарасвамијева расподела (Alanzi, Rafique, Tahir, Sami, & Jamal, 2022), генерализована Топ-Леонеова расподела (Khan & Khan, 2018), Лапласова логистичка расподела (Стојановић, В. и сар., 2024а), Гумбелова логистичка расподела (Стојановић, В. и сар., 2024б), Кошијева логистичка расподела (Стојановић, В. и сар., 2025а), као и многе друге.

2.5.2 Пропорционални ауторегресивни (PAR) модел

Пропорционални ауторегресивни (енг. *Proportional Auto-Regressive* – PAR) модели припадају класи ауторегресивних (AR) модела, тј. укључују моделовање зависности у којој

је садашња вредност процеса пропорционална претходним вредностима. Први облик PAR модела предложио је Мекензи (McKenzie, 1985), који је конструисао ауторегресивне моделе са маргиналном бета расподелом и позитивним, односно негативним аутокорељацијама. До данас постоји тек неколико PAR процеса, који углавном користе одговарајуће ауторегресивне једначине са бета дистрибуираним случајним коефицијентима (Bonat, W.H. и сар., 2019; Bayer, Cintra, & Cribari-Neto, 2018; Aknouche & Dimitrakopoulos, 2023), односно са тзв. симплекс расподелом (Zhang, Qiu, & Shi, 2016). Прецизнија дефиниција PAR модела може се дати на следећи начин:

Дефиниција 2.8. Нека је (X_t) временска серија, тј. низ случајних величина дефинисан на јединичном $(0,1)$ интервалу. PAR модел реда k дефинише се изразом:

$$X_t = \sum_{i=1}^k \alpha_i X_{t-i} + \left(1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i\right) \varepsilon_t,$$

где су $\alpha_i \in (0,1)$, $i = 1, 2, \dots, k$ тежински коефицијенти, ε_t је иновациони низ (бели шум) и $k \in \mathbb{N}$ ред модела.

Дакле, у PAR моделу тренутна вредност X_t се рачуна као збир конвексне комбинације претходних вредности $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k}$ и тренутне вредности иновација ε_t . За разлику од конвенционалних модела временских серија са реалним вредностима, PAR модели поседују специфичне структурне карактеристике, укључујући ограничења вредности домена, граничне ефекте, асиметрично маргинално понашање и променљиву варијабилност у близини граница јединичног интервала.

Упркос наведеним предностима PAR модела, постоје и одређена значајна ограничења, која се углавном односе на претпоставке о расподелама које имају ограничену флексибилност облика или унапред одређени смер асиметрије. Из тих разлога, у овој дисертацији предложен је нови PAR модел са иновацијама које имају тзв. квази-Линдлијеву полулогистичку јединичну расподелу (енг. *Quasi-Lindley Half-Logistic Unit – QHU Distribution*). QHU расподела такође представља једну од савременијих јединичних расподела са изразитом флексибилношћу, а уведена је у раду (Стојановић, В.С. и сар., 2025b) Стога и одговарајући QHU-PAR модел првог реда (у даљем тексту, QHU—PAR(1) модел) поседује слична својства.

На тај начин, предложени PAR модел омогућава описивање процеса ограничених на интервалу $(0,1)$, што је погодно за анализу релативних удела, вероватноћа и других нормализованих форензичких показатеља. Посебно су разматрана учешћа различитих специфичних облика динамике криминала у Републици Србији као облици криминалног деловања који захтевају примену форензичких анализа за идентификацију околности, чињеница и лица у циљу расветљавања кривичних дела. Према литературним изворима у досадашњим истраживањима, PAR модели нису досад коришћени у моделовању криминалних активности, тако да овакво моделовање представља нов и оригиналан приступ моделовању у анализи криминалитета.

2.6 ФОРЕНЗИЧКО ИНЖЕЊЕРСТВО И САВРЕМЕНА ФОРЕНЗИЧКА АНАЛИТИКА

Форензичко инжењерство представља интердисциплинарну научну област која интегрише знања из техничких, природних, медицинских и друштвених наука у циљу прикупљања, анализе и тумачења материјалних и других доказа релевантних за утврђивање чињеница у кривичном поступку. Основни задатак форензичког инжењерства није само идентификација и испитивање трагова насталих извршењем кривичног дела, већ и реконструкција механизма настанка догађаја, утврђивање узрочно-последичних веза и пружање научно засноване подршке доношењу одлука током истраге и судског поступка. Сложеност појединих кривичних дела намеће потребу за применом посебних стручних знања, при чему посебан значај имају управо она кривична дела чије расветљавање и доказивање захтева примену метода форензичког инжењерства (Радовановић, 2017).

2.6.1 Форензичко инжењерство као област примене математичких модела

Традиционално, форензичко инжењерство било је усмерено пре свега на анализу појединачних случајева, лабораторијска испитивања и експертско тумачење материјалних трагова (Noon, 2001). Међутим, интензиван развој информационих технологија, дигитализација полицијских евиденција и доступност великих количина структурираних података значајно су проширили област његове примене. Поред класичне анализе појединачних трагова, савремена форензичка пракса све више обухвата анализу временских и просторних образаца криминалитета, као и испитивање међузависности различитих врста

инцидентних догађаја. Тако форензичко инжењерство постепено прераста из дисциплине усмерене искључиво на реконструкцију појединачних догађаја у област која пружа подршку стратешком планирању, процени ризика и превенцији криминалитета.

Таква промена природе расположивих података довела је и до промене захтева који се постављају пред форензичке анализе. Уместо искључивог одговора на питање шта се догодило, на основу доступних проверљивих чињеница и физичких доказа, све већи значај добијају питања када, где, колико често, којом динамиком и под којим условима долази до појаве одређених кривичних дела. Истовремено, од савремених аналитичких поступака очекује се да омогуће препознавање скривених образаца, благовремено откривање структурних промена, процену ризика и предвиђање будућих токова криминалитета, како би се обезбедила ефикаснија подршка оперативном и стратешком одлучивању.

Истовремено, физички докази и подаци који се користе у форензичким анализама имају бројне специфичности. Они су најчешће временски зависни, стохастичке природе, нестационарни, подложни структурним променама и утицају различитих спољашњих фактора. Поред тога, у пракси су често непотпуни, различитог степена поузданости и прикупљени из више независних извора. Због тога класичне дескриптивне и статистичке методе, иако неопходне, често нису довољне за потпуно разумевање динамике криминалних појава, нити за предвиђање њиховог будућег развоја.

Управо из тог разлога математичко моделовање постаје један од кључних аналитичких инструмената савремене форензичке аналитике. Формални математички модели омогућавају да се сложени процеси опишу јединственим аналитичким оквиром, идентификују законитости које нису непосредно уочљиве и квантификује неизвесност која прати реалне системе. За разлику од класичних статистичких приступа, динамички и стохастички модели омогућавају истовремено описивање развоја криминалних појава у времену, анализу њихових међусобних зависности и процену вероватних будућих сценарија. На тај начин они не представљају замену за класичне форензичке методе, већ њихову аналитичку надоградњу, омогућавајући да се велики обим расположивих података трансформише у информације релевантне за форензичку анализу, извођење закључака и доношење одлука.

У овој дисертацији форензичко инжењерство посматра се пре свега као област *примене математичко-стохастичких модела*. Полази се од претпоставке да динамика

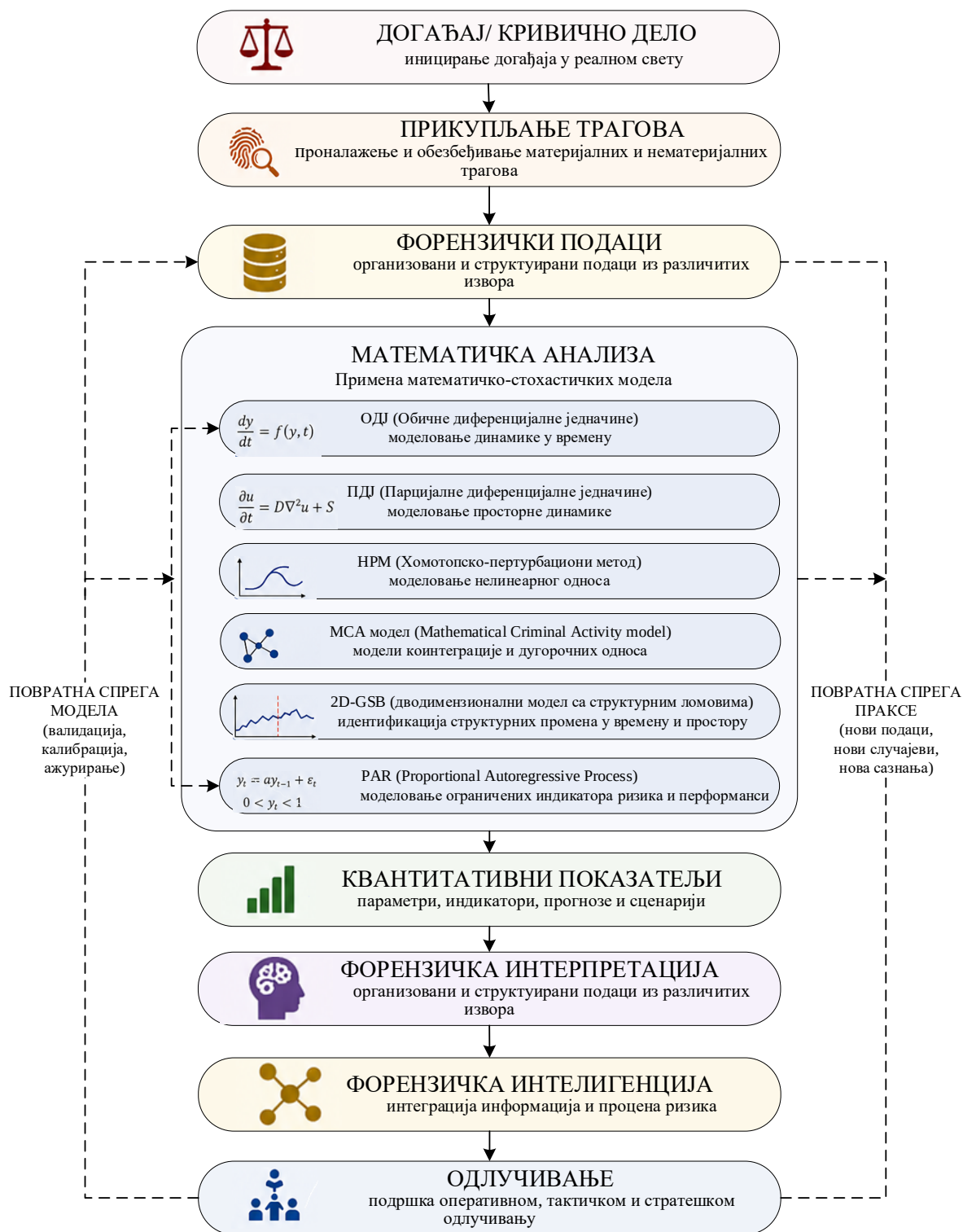
криминалитета представља сложен систем у коме истовремено делују детерминистички и случајни фактори, услед чега је за њено адекватно описивање неопходно комбиновати методе математичког моделовања, теорије динамичких система, стохастичких процеса и статистичке анализе. Тако математички модели постају средство за идентификацију временских зависности, откривање структурних промена, анализу међузависности различитих категорија кривичних дела и прогнозирање њиховог будућег развоја, чиме се ствара формална основа за примену савремених концепата форензичке аналитике и форензичке интелигенције.

Полазећи од наведеног, у наставку рада биће представљени математички модели који су развијени управо са циљем да одговоре на специфичне аналитичке захтеве форензичког инжењерства. Њихова улога није ограничена на описивање динамике криминалитета, већ обухвата идентификацију структурних промена, анализу међузависности различитих категорија кривичних дела, процену параметара процеса и предикцију њиховог будућег развоја, чиме се ствара формална основа за примену савремених концепата форензичке аналитике и форензичке интелигенције.

2.6.2 Форензички аналитички циклус

Савремено форензичко инжењерство све више превазилази класичан приступ заснован искључиво на анализи појединачних трагова и реконструкцији појединачних догађаја. Развој информационих технологија, доступност великих количина података и потреба за бржим и поузданијим доношењем одлука условили су развој форензичке аналитике као дисциплине која интегрише прикупљање података, њихову анализу, математичко моделовање и интерпретацију резултата у јединствен аналитички процес.

У том контексту, форензички аналитички поступак може се посматрати као континуирани циклус у коме се чињенице и физички докази прикупљени током истраге постепено трансформишу у информације, затим у научно засновано знање, а коначно у подршку процесу одлучивања. У оквиру ове дисертације овај процес означава се као *форензички аналитички циклус*, приказан на слици 2-2, који представља концептуални оквир за повезивање активности форензичког инжењерства са применом математичко-стохастичких модела.



Слика 2-2. Форензичко аналитички циклус предложен у дисертацији

На почетку циклуса налази се кривични или други инцидентни догађај, током чијег се увиђаја и накнадне истраге прикупљају материјални докази, трагови и друге релевантне

чињенице. Након тога следи њихова систематизација и формирање базе форензичких података, која представља основу за даље аналитичке поступке. За разлику од традиционалног приступа, у коме су се закључци најчешће заснивали искључиво на експертској интерпретацији појединачног случаја, савремени приступ, форензичке аналитике омогућава истовремено проучавање већег броја случајева, њихове временске динамике, просторне расподеле и међусобне повезаности.

У централном делу предложеног циклуса налази се математичка анализа, у оквиру које се примењују одговарајући детерминистички и стохастички модели, у зависности од природе анализираног проблема. У овој дисертацији разматрају се модели засновани на обичним и парцијалним диференцијалним једначинама, методама вишеатрибутног одлучивања, хомотопијској пертурбационој методи, као и савременим стохастичким моделима временских серија, укључујући моделе са структурним променама и пропорционалне ауторегресивне процесе. Применом ових модела подаци се трансформишу у квантитативне показатеље који омогућавају описивање динамике посматраних процеса, процену параметара, анализу неизвесности и предвиђање будућих кретања.

Добијени резултати не представљају крај аналитичког поступка, већ основ за разумевање догађаја који се посматрају, као и основ за даљу форензичку интерпретацију. Управо у овој фази квантитативни резултати добијају практични значај, јер омогућавају препознавање образаца криминалитета, идентификацију структурних промена, процену ризика и формулисање закључака који могу бити од значаја за оперативно поступање, као и планирање форензичких активности и подршку судским поступцима. Интеграцијом добијених информација формира се основа за форензичку интелигенцију, чији је циљ да расположиве податке и информације претвори у поуздану основу за доношење одлука.

Посебна карактеристика предложеног концептуалног оквира огледа се у постојању повратне спреге између резултата анализа, односно давања налаза и мишљења и планирања будућих форензичких активности. Нови случајеви, додатни подаци и резултати претходних анализа доприносе континуираном унапређењу математичких модела, док истовремено добијене прогнозе и процене ризика омогућавају ефикасније планирање форензичких анализа и рационалније ангажовање расположивих ресурса. На тај начин форензички аналитички циклус не представља једнократан поступак, већ континуирани процес учења и унапређења аналитичких метода. Као што се може видети на слици 2-2, овај концепт се

заснива на трансформацији података прикупљених током форензичких поступака у квантитативне информације добијене применом математичко-стохастичких модела. Оне представљају даљу основу за форензичку интерпретацију, процену ризика и доношење одлука.

Из предложеног концептуалног оквира може се уочити да математички модели немају улогу замене класичних форензичких метода, већ представљају њихову аналитичку надоградњу. Док форензичке методе обезбеђују поуздано прикупљање и верификацију чињеница, математички модели омогућавају формално описивање динамике криминалитета, идентификацију закономерности, квантификацију неизвесности и предвиђање будућих промена. На тај начин успоставља се двосмерна веза између форензичке праксе и математичког моделовања, у којој сваки модел произилази из конкретног аналитичког проблема, док добијени резултати представљају основу за унапређење форензичких анализа и процеса одлучивања. Ако су чињенице уређене логично и систематски, закључци би требало да буду очигледни. Ипак, нежељени догађаји, укључују више повезаних догађаја који се дешавају секвенцијално или пак у различитим комбинацијама редоследа дешавања, тако да за форензичко инжењерске анализе се могу применити методе више критеријумског одлучивања (Стојичић, и други, 2023).

Имајући у виду правне последице анализе догађаја, лица која спроводе анализе са инжењерског аспекта, могу бити позвана да сведоче или вештаче у оквиру спровођења процедура кривичног поступка. Овај аспект захтева присуство одговарајућих квалификација у односу на тип анализа које се спроводе. Презентовање и изношење основних чињеница и претпоставки треба да буде спроведено на разумљив начин, засновано на стручним основама, уз јасност изнетих закључака, дату вероватноћу изнетих образложења везаних за догађај који се разматра, непристрасност и професионализам.

Лица који на основу свог познавања предметне области, односно области науке, технике, уметности, вештине или заната, директно или индиректно доприносе свестраном, објективном и праведном расветљавању и решавању кривичне ствари, представљају стручна лица у кривичном поступку (вештаке). Форензички инжењери, помажу у чињеничном и правном дефинисању кривичне ствари чија делатност, као стручних лица, представља стручну помоћ у кривичном поступку (Стојичић, 2013). На тај начин, форензички инжењер има важну улогу у пружању стручне помоћи на установљавању

потпуних и на чињеницама заснованих информација, формулисаних у форми налаза и мишљења (Carpenter, 2001). Резултати форензичких анализа могу имати пресудну улогу на ток истраге и судски процес, као и усмеравању даље праксе у циљу превенције одређене врсте догађаја. Налаз и мишљење до којих се дође у току анализе применом стручних знања, вештина и специфичних знања могу бити усмерени и ка побољшавању безбедности производног процеса, побољшању перформанси и ефикасности рада машина и уређаја, поред стручне помоћи органу поступка у утврђивању чињеница које се односе на несреће или кривичне ствари.

2.6.3 Методе форензичког инжењерства

Методе форензичког инжењерства примењују се у анализи физичких доказа и чињеница кроз идентификацију лица и материјалних доказа везаних за посматрани инцидентни догађај. Покривају широк спектр инцидентних догађаја, укључујући индустријске хаварије, саобраћајне незгоде, отказе техничких система, пожаре, експлозије и друге догађаје чије је расветљавање од значаја за кривични или други правни поступак. Односно орган поступка одредиће вештачење, које обухвата примену метода форензичког инжењерства, када је за утврђивање или оцену неке чињенице у поступку потребно стручно знање. Основни циљ примене метода форензичкихког инжењерства је утврђивање узрока настанка догађаја, реконструкција његовог тока и формирање стручно заснованог налаза и мишљења. Овај процес обухвата прикупљање и систематизацију података, анализу материјалних трагова, формулисање и проверу радних хипотеза, као и синтезу добијених резултата у јединствен аналитички оквир.

У случају кривичних дела од посебног интереса су методе усмерене ка идентификацији починилаца, анализа трагова са места извршења, утврђивање образаца извршења, повезивање релевантних сазнања и реконструкцију догађаја кроз примену модела и симулација догађаја. Најчешће коришћене форензичке методе за идентификацију починиоца, су: трасологија, дактилоскопија, ДНК анализа, хемијске анализе, анализа фото и видео записа и друге методе дигиталне форензике.

Трасологија се бави откривањем, фиксирањем, анализом и тумачењем трагова насталих међусобним контактом објеката, ради идентификације објеката, реконструкције догађаја и утврђивања околности извршења кривичног дела. Она представља посебан део

криминалистике која се бави тумачењем трагова, јер траг је „неми сведок“ догађаја. При чему је потребно имати у виду траг остављен на месту догађаја, може водити ка расветљавању околности и упућивати на починиоца, али не мање важно је да може бити постављен са намером за прикривање и лажно упућивање или усмеравање истраге. Један од најважнијих постулата, који се односи на трагове је Локаров принцип размене, да свака интеракција између починиоца, жртве и места догађаја доводи до трансфера физичких доказа, чиме се успоставља материјална веза која се може идентификовати, анализирати и интерпретирати применом форензичких метода у циљу реконструкције догађаја, односно да није могућ контакт без да не настане траг (Petrovic, Stojicic, Radovanovic, Nikolic, & Petrovic, 2022; Bodziak, 2000). Често трагови нису видљиви голим оком тако да захтевају ангажовање криминалистичких техничара и примену форензичко-инжењерских анализа за омогућавање употребљивости трагова за идентификацију (Vučković & Milašinović, 2024). Трагови су условно речено неми сведоци који усмеравају кривични поступак, омогућавајући да се исправно утврди и интерпретира криминалистичко и кривично процесно доказно значење конкретног трага (Шкулић, 2018).

Дактилоскопија као посебна форензичка дисциплина бави се анализом отисака папиларних линија прстију, као трагова са лица места, са циљем идентификације лица у кривичним и другим правно релевантним поступцима. За узимање трагова са лица места константно се истражују и користе иновативне методе. Веза између особе и ових података је једнозначна, односно вероватноћа поклапања је толико мала да се може сматрати да не постоје два лица са идентичним биометријским подацима наведених категорија. Развојем информационих система и аутоматизацијом процеса, као и употребом савремених комуникација остварује се значајан допринос поузданим и брзим идентификовањем лица. AFIS (*Automated Fingerprint Identification System*) је специјализован систем, који је у почетку био намењен искључиво криминалистичкој полицији за регистрацију, идентификацију, верификацију идентитета починилаца кривилбих дела, док је данас све више у употреби у такозваном „цивилном“ сектору. Примена у „цивилном“ сектору усмерена је ка обезбеђивању једнозначне биометријске идентификације грађана, ради утврђивања и/ или потврђивања идентитета помоћу отиска прста, обезбеђујући предуслове за производњу поузданијих идентификационих докумената и самим тим спречи крађа идентитета и/ или онемогући постојање вишеструких идентитета за исто лице. Такође, може се применити у

пословним процесима везаним за заштиту и безбедност лица и објеката, односно омогућава контролу уласка у објекте и просторије са ограниченим приступом. Евидентно је све чешћа примена и за пријављивање (логовање) за омогућавање коришћења уређаја и система, као што су мобилни уређаји мобилни рачунари (лаптоп), екстерни дискови, таблети и мобилни телефони, замењујући употребу лозинки и смањујући могућност неауторизованог приступа подацима на тим уређајима и медијумима.

На основу профила ДНК (дезоксирибонуклеинске киселине), могу се вршити форензичко-генетичке анализе за потребе кривичног поступка, односно утврђивања идентитета лица. ДНК идентификација је форензичка метода која се заснива на анализи специфичних генетичких маркера у дезоксирибонуклеинској киселини, ради поуздане идентификације лица, утврђивања биолошког порекла трагова и повезивања лица са кривичним догађајима у кривичним и другим правно релевантним поступцима.

На основу система који користе биометријске податке могуће је у кратком временском року идентификовање особа починилаца кривичних дела. Овакви системи укључују поштовање међународних норми и стандарда и тиме стварају основ и за међународну размену података у кривичним стварима¹⁰.

Анализа фото и видео записа са сигурносних камера представља форензичку методу у области дигиталне форензике. Обухвата прикупљање, обраду и тумачење визуелних снимака ради идентификације лица, објеката и догађаја, утврђивања временско-просторних околности и реконструкције тока кривичног догађаја у кривичним и другим правно релевантним поступцима.

У пракси, догађаји који се анализирају често не могу бити поновљени у условима и обиму који одговара самом догађају у лабораторијским условима. Ово често није могуће због њихове сложености, специфичности или безбедносних ограничења. Чак и када је експеримент могуће извести, лабораторијски услови ретко у потпуности одражавају услове који су постојали у реалном окружењу. Због тога се све чешће примењују симулациони и математички модели који омогућавају реконструкцију процеса, анализу узрочно-последичних односа и процену различитих сценарија развоја догађаја. У зависности од

¹⁰ Regulation (EU) 2024/982 of the European Parliament and of the Council of 13 March 2024 on the automated search and exchange of data for police cooperation, and amending Council Decisions 2008/615/JHA and 2008/616/JHA and Regulations (EU) 2018/1726, (EU) No 2019/817 and (EU) 2019/818 of the European Parliament and of the Council (the Prüm II Regulation)

природе проблема, могу се применити детерминистички модели, који описују физичке законитости процеса, као и стохастички модели, који омогућавају анализу неизвесности, случајних појава и временски променљивих процеса.

Посебан значај у савременом форензичком инжењерству има анализа временских серија. Посматрањем догађаја кроз време могуће је идентификовати трендове, сезонске утицаје, структурне промене и друге закономерности које нису уочљиве анализом појединачних случајева. У том контексту, ауторегресивни модели омогућавају испитивање временске зависности између узастопних посматрања, процену степена постојаности процеса и анализу утицаја претходних стања на будуће вредности. Такви модели могу указати на стабилност криминалних образаца, континуитет одређених врста инцидената или промене које указују на појаву нових фактора ризика. Уколико модел покаже значајну временску зависност, то може представљати индиректан показатељ да узроци инцидената нису изоловани случајеви, већ део ширег и трајнијег обрасца ризичног понашања или функционисања система. Анализа параметра ауторегресије одговара циљу потребне процене степена утицаја претходних стања на будуће вредности. Високе вредности ауторегресивног параметра указују на јаку временску постојаност и спорије промене система, док ниже вредности указују на већу улогу случајних или спољашњих фактора.

Поред тога, ауторегресивна структура омогућава развој предиктивних модела који могу послужити као подршка стратешком планирању и управљању ризицима. Иако такви модели не могу са сигурношћу предвидети појединачне догађаје, они омогућавају процену вероватног будућег понашања система на основу историјских података. На тај начин се повећава способност раног уочавања одступања од уобичајених образаца, што може бити значајно за превентивно деловање и усмеравање обезбеживања адекватних форензичких ресурса.

Посебан значај за форензичку аналитику и управљање ризицима имају савремени стохастички модели временских серија, који омогућавају анализу динамике инцидентних догађаја, идентификацију структурних ломова, анализу нелинеарних зависности и прогнозирање будућих кретања, омогућавајући формално описивање сложених процеса који се карактеришу израженом неизвесношћу и нелинеарним понашањем.

Полазећи од наведеног, методе форензичког инжењерства више се не заснивају искључиво на експертском тумачењу појединачних случајева, већ све више укључују примену математичког моделовања као средства за формализацију сложених процеса и квантификовање неизвесности. На тај начин математички модели не представљају алтернативу класичним форензичким методама, већ њихову аналитичку надоградњу, омогућавајући објективнију анализу података, проверу постављених хипотеза и научно засновано доношење закључака. Управо на таквом приступу заснивају се математичко-стохастички модели који су предмет даљих разматрања у овој дисертацији.

2.6.4 Очекивани резултати примене метода форензичког инжењерства, интерпретација и подршка одлучивању

Финални резултат примене метода форензичког инжењерства представља налаз и стручно мишљење, припремљени у форми која одговара кривичним, парничним и другим поступцима. Да би њихова доказна вредност била прихватљива, неопходно је да се заснивају на проверљивим чињеницама, научно утемељеним методама и јасно дефинисаним критеријумима закључивања. Због тога форензички извештај, поред описа чињеничног стања и резултата спроведених анализа, треба да садржи и образложење примењених аналитичких поступака, модела и метода, чиме се обезбеђује транспарентност, проверљивост и репродуктивност читавог процеса закључивања.

Посебан значај у савременој форензичкој пракси има примена математичких модела, јер омогућава формализацију узрочно-последичних односа, квантификовање неизвесности и проверу постављених хипотеза применом статистичких и стохастичких метода. На тај начин се повећава објективност форензичких анализа и смањује зависност закључака од субјективне процене појединачног експерта. Математичко моделовање не представља замену за класичне форензичке методе, већ њихову аналитичку надоградњу, омогућавајући да се расположиви подаци обраде на систематичан и научно заснован начин.

Поред подршке анализи појединачних случајева, резултати форензичких анализа могу имати и значајну стратешку вредност. Анализом већег броја инцидентних догађаја могуће је идентификовати временске и просторне закономерности, проценити факторе ризика и уочити структурне промене које нису видљиве посматрањем појединачних случајева. Посматрањем ових догађаја као временских серија стварају се услови за примену

савремених математичко-стохастичких модела, који омогућавају описивање њихове динамике, прогнозирање будућих кретања и процену вероватноће различитих сценарија. Такве анализе представљају значајну основу за планирање форензичких активности, оптимизацију расположивих ресурса и ефикасније управљање ризицима.

Полазећи од концепта форензичког аналитичког циклуса представљеног у претходном одељку, форензички налаз се не посматра искључиво као крајњи резултат једног вештачења, већ као део континуираног процеса стварања нових знања. Интеграцијом резултата већег броја анализа, применом математичког моделовања и њиховом форензичком интерпретацијом ствара се поуздана информациона основа за све нивое одлучивања од оперативног до стратешког одлучивања. На тај начин форензичко инжењерство превазилази оквир реконструкције појединачних догађаја и постаје значајан инструмент савремене форензичке аналитике и форензичке интелигенције, што уједно представља и основну идеју на којој се заснивају математички модели развијени у наставку ове дисертације.

2.7 ЕЛЕМЕНТИ ФОРЕНЗИЧКЕ ИНТЕЛИГЕНЦИЈЕ

Форензичка интелигенција представља један од најзначајнијих савремених праваца развоја форензичких наука. За разлику од традиционалног приступа, у коме се форензичким методама анализирају материјални докази и трагови са лица места првенствено ради утврђивања чињеница у конкретном судском поступку, форензичка интелигенција тежи широј употреби података о спроведеним форензичким анализама као извора информација за оперативно, тактичко и стратешко одлучивање. На тај начин форензика превазилази оквир реактивног приступа и постаје активан инструмент подршке откривању, разумевању и превенцији криминалних активности.

Последњих година овај концепт добија све већи значај у научној литератури, посебно кроз радове попут (Roux, и други, 2022), као и кроз принципе дефинисане Сиднејском декларацијом, која указује да улога форензичке науке не треба да буде ограничена искључиво на судски поступак, већ да обухвати и подршку полицијском раду, систему безбедности и ширем систему управљања криминалитетом. У том смислу, форензичка интелигенција представља процес трансформације форензичких података у информације

које могу бити искоришћене за разумевање криминалних образаца, идентификацију ризика и планирање будућих активности.

У контексту ове дисертације форензичка интелигенција представља природан наставак форензичког аналитичког циклуса представљеног у претходном одељку. Док форензички аналитички циклус описује начин на који се прикупљени физички докази, трагови трансформишу у квантитативне показатеље применом математичко-стохастичких модела, форензичка интелигенција користи тако добијене информације ради подршке процесу доношења одлука. На тај начин математички модели постају веза између форензичких података и практичне примене добијених резултата.

На тај начин, форензичка интелигенција представља релативно нов, али веома значајан концепт у форензичким наукама и студијама у области безбедности. Као пресек између криминалистике и форензике, она разматра начин на који знање из обе области може допринети бољем разумевању криминала и понудити нове правце у теорији и пракси (Ribaux, и други, 2003; Ribaux, Crispino, & Roux, 2014; Décary-Hétu, Delémont, & Mulone, 2017; Roux, и други, 2022). У ширем тумачењу, обавештајни подаци су тачан, благовремен и користан производ логичке обраде информација (Ribaux, и други, 2003).

Неке типологије које илуструју разноликост врста обавештајних података које пружају трагови, предложене у (Ribaux & Canappele, 2017) приказане су у табели 2-1. Из приказаних примера може се уочити да форензички трагови немају вредност само као доказно средство у појединачном поступку, већ и као извор информација који омогућава откривање закономерности, повезивање различитих догађаја и процену будућих ризика. Управо тај прелаз од анализе појединачног случаја ка анализи већег броја међусобно повезаних случајева представља суштинску разлику између класичне форензике и концепта форензичке интелигенције.

Примена форензичких метода се сматра одговором на догађаје, од случаја до случаја, док су одређени облици криминала високо концентрисани и понављајући, за шта се поставља питање улоге трагова у овој перспективи. Форензичка интелигенција представља процес систематског прикупљања, обраде, анализе и интерпретације форензичких података и трагова (нпр. ДНК, отисци прстију, дигитални трагови, балистички докази, и сл.), са циљем да се они искористе као извор обавештајних информација, које могу допринети

превенцији, откривању и расветљавању криминалних активности (Devlin, Morelato, & Baechler, 2024).

Табела 2-1. Примери везе форензичке интелигенције са истрагама

Форензички траг	Форензичка информација	Аналитичка обрада	Подршка истрази
ДНК профил	Идентификација лица и повезивање случајева	Поређење ДНК профила	Усмеравање истраге
Отисци прстију	Идентификација особе	AFIS анализа	Сузити круг осумњичених
Балистички трагови	Повезивање оружја и догађаја	IBIS анализа	Повезивање кривичних дела
Дигитални трагови	Анализа комуникација	Анализа мрежа и логова	Откривање криминалних група
Просторно-временски подаци	Обрасци криминалитета	Математичко моделовање временских серија	Прогнозирање и планирање активности

Другим речима, форензичка интелигенција спаја форензичке науке са обавештајним приступом. Подржавајући концепт да се докази добијени применом форензичких метода не користе само за судске поступке, већ и за коришћење ових података у оперативном раду, као и стратегијско и оперативно доношење одлука. Основни методи и алати које користи форензичка интелигенција су базе података (као базе података за складиштење и упоређивање ДНК профила, AFIS за складиштење и упоређивање дактилоскопских података, IBIS (*Integrated Ballistic Identification System*) за балистичке податке, статистичке и математичке методе за откривање повезаности, географски информациони системи (GIS) за просторну анализу, вештачка интелигенција и машинско учење за анализи великих скупова форензичких података у дигиталном облику.

Посебан значај у том процесу има математичко моделовање. Велике количине форензичких података карактеришу изражена временска зависност, структурне промене, неизвесност и нелинеарност, због чега класичне дескриптивне анализе често нису довољне. Применом математичких и стохастичких модела могуће је идентификовати временске трендове, открити структурне ломове, анализирати међузависност различитих категорија кривичних дела и проценити вероватноћу будућих догађаја. Тако добијени резултати представљају значајан извор информација за форензичку интелигенцију, јер омогућавају

благовременно уочавање промена у динамици криминалитета и рационалније планирање форензичких активности.

За разлику од традиционалног приступа, који је усмерен на реконструкцију већ насталог догађаја, форензичка интелигенција има проактивну улогу. Њен циљ није само објашњење прошлости, већ и подршка будућем деловању кроз процену ризика, идентификацију приоритетних области деловања и оптимално коришћење расположивих ресурса. Интеграцијом форензичких података са другим изворима информација и применом математичког моделовања стварају се услови за доношење поузданијих оперативних, тактичких и стратешких одлука.

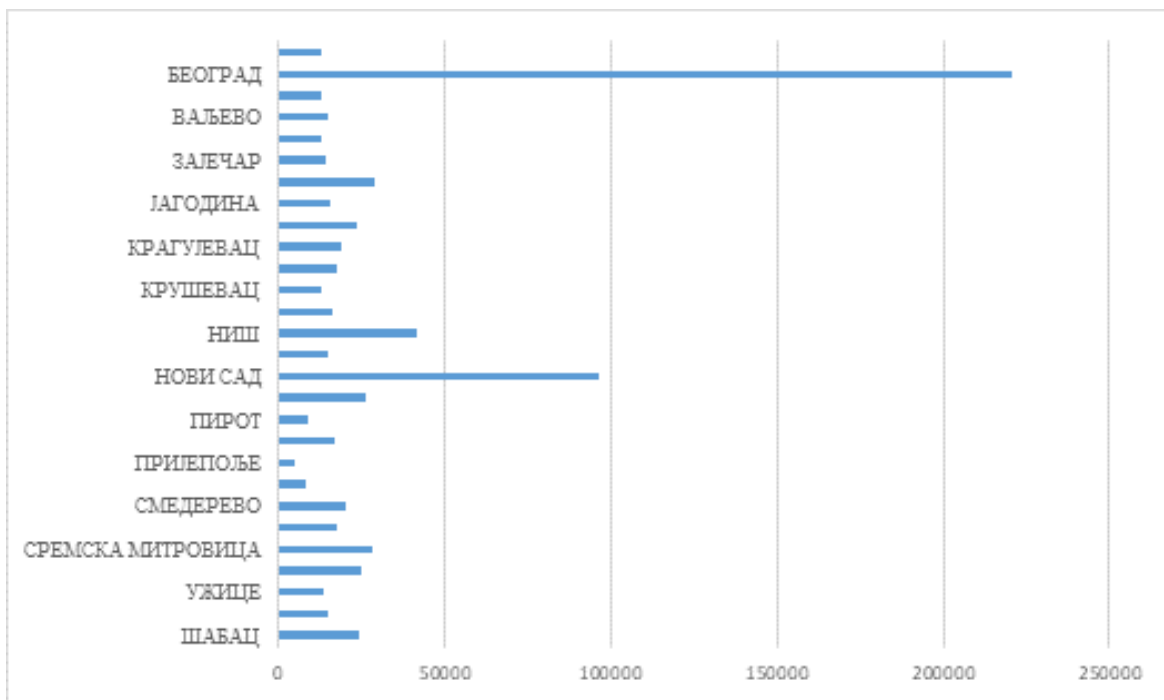
Полазећи од наведеног, форензичка интелигенција у овој дисертацији не посматра се као издвојена дисциплина, већ као *област примене резултата математичко-стохастичког моделовања*. Управо из тог разлога, у наставку рада пажња ће бити усмерена на развој и анализу математичких модела који омогућавају формално описивање динамике криминалитета, идентификацију структурних промена и прогнозирање будућих кретања, чиме се обезбеђује научно утемељена подршка савременој форензичкој аналитици и форензичкој интелигенцији.

3. МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА И ОПИС ПОДАТАКА

Кривично дело (КД) представља кршење закона, за које је прописана кривична санкција¹¹ према Кривичном законiku (КЗ) ("Службени гласник РС", бр. 85/05, 88/05 - исправка, 107/05 - исправка, 72/09, 111/09, 121/12, 104/13, 108/14, 94/16, 35/19, 94/24) и другим законима, за које се предузимају процеси и поступци према Законiku о кривичном поступку (ЗКП) ("Службени гласник РС", бр. 72/11, 101/11, 121/12, 32/13, 45/13, 55/14, 35/19, 27/21 - УС, 62/21 - УС). ЗКП утврђује правила, тако да нико невин не буде осуђен, а да се учиниоцу кривичног дела изрекне кривична санкција под условима које прописује кривични закон, на основу законито и правично спроведеног поступка. Кривичним делом се генеришу докази који се применом научних принципа, метода и технологија на њихову анализу, односно применом метода форензичког инжењерства, преводе у објективне и јасне информације које повезују осумњичене, жртве и догађаје.

За потребе овог истраживања коришћени су подаци о евидентираним КД Министарства унутрашњих послова Републике Србије за период од 1.1.2015. до 31.12.2024. године. Подаци представљају основу за идентификацију кривичних дела код којих се примењују методе форензичког инжењерства и за развој математичких модела описаних у наставку рада. Имајући у виду предмет и циљ овог истраживања, анализа је ограничена на КД прописана Кривичним закоником, јер она чине 98% у евиденцији која се води у Министарства унутрашњих послова. Имајући у виду да су за ова дела предвиђене кривичне санкције, њихово доказивање може захтевати примену метода форензичког инжењерства. Преглед учесталости евидентираних КД према територијалној дистрибуцији дат је на слици 3-1, на основу које су идентификовани Београд, Нови Сад и Ниш, као подручја са највећим степеном евидентираних КД. Додатно, у табели 3-1 дат је преглед основног скупа података, односно учесталости евидентираних кривичних дела према законском основу, као и на основу територијалне дистрибуције идентификованих подручја (градова) са највећом заступљеношћу КД.

¹¹ Казна, мера упозорења, мера безбедности или васпитна мера.



Слика 3-1. Преглед броја КД у посматраном узорку према територијалној дистрибуцији

Табела 3-1. Преглед основног скупа података о евидентираним КД у МУП РС за период 2015-2024. године

КД/ ПУ	Град Београд	Нови Сад	Ниш	Укупно
Укупно КД	222.830	96.980	42.066	798.381
КД по КЗ	220.641	96.304	41.579	782.469
КД по Закону о ЈРМ (чл. 23)	1.361	406	235	6.723
КД по Закону о пореском поступку и пореској администрацији (чл. 176)	770	207	249	8732
КД по Закону о поступку регистрације у агенцији за привредне регистре (чл. 45)	28	11	/	59
КД по Закону о спречавању допинга у спорту (чл. 39)	19	/	/	49
КД по Закону о привредним друштвима (чл. 584)	1	1	/	35
КД по Закону о регистрацији привредних субјеката (чл. 78)	3	39	/	57
КД по Закону о девизном пословању (чл. 57)	2	5	2	151
КД по Закон о банкама (чл. 136)	2	/	/	9
КД по Закону о тајности података (чл. 98)	1	1	/	47
КД по Закон о трансплантацији органа (чл. 79)	1	/	/	2
КД по Закон о заштити биља (чл. 78)	1	/	/	1

КД/ ПУ	Град Београд	Нови Сад	Ниш	Укупно
КД по Закону о железници (чл. 139)	/	6	/	21
КД по Закону о платном промету (чл. 61)	/	/	1	2
КД по Закону о агенцији за борбу против корупције (чл. 72)				2
КД по Закон о избору народних посланика (чл. 106)	/	/	/	1
КД по Закон о планирању и изградњи (чл. 149)	/	/	/	1
КД по Закон о стечају (чл. 205)	/	/	/	1
КД по Закону о ветеринарству (чл. 155)	/	/	/	6
КД по Закону о водама (чл. 210)	/	/	/	13
Укупно други Закони осим КЗ	2.189	676	487	15.912

3.1 ПОДАЦИ О ОДРЕЂЕНИМ КРИВИЧНИМ ДЕЛИМА ОД ИНТЕРЕСА ЗА ПРИМЕНУ ФОРЕНЗИЧКИХ МЕТОДА

За даљу анализу и идентификацију одговарајућег узорка, у истраживању су посматрани подаци о евидентираним КД која представљају категорију оних кривичних дела код којих се у пракси редовно примењују методе форензичког инжењерства. То може бити случај, на пример, код физичког насиља, где се примењују форензичке методе за идентификацију лица на основу биометријских података, анализа крви, и сл., као и балистичке и друге методе, за потребе идентификације коришћеног оружја и оруђа, или у случају дела која спадају у високотехнолошки криминал, где се примењују методе дигиталне форензике. Као што је већ речено раније, са аспеката истраживања и примене модела нису укључиване социјалне или психолошке теорије везане за појаву настанка и извршења кривичних дела, већ је уместо тога усмерена на конзистентност са резултатима анализе података.

Након што су подаци иницијално обрађени и форматирани, посматране су временске серије које описују еволуцију укупног броја евидентираних кривичних дела. Како би се сумарно приказале карактеристике и описала општа својства посматраног скупа података на јасан и разумљив начин, примењене су најпре методе дескриптивне статистике. На тај начин, табела 3-2 приказује резултате дескриптивне статистичке анализе, који укључују средње вредности, медијану, стандардно одступање, варијансу, коефицијент варијабилности, меру симетрије и меру спљоштености/ издужености у односу на нормалну

дистрибуцију, интервал и минимални и максимални број догађаја у основној јединици времена и укупан број догађаја у посматраном скупу и градовима са највећим степеном учесталости.

Табела 3-2. Преглед дескриптивних статистичких података посматраног узорка

	КЗ укупно	БГД_КЗ	Scale ¹² БГД	НС_КЗ	Scale НС	НИ_КЗ	Scale НИ
Средња вредност	214,2	60,4	0,284	26,36	0,126	11,39	0,054
Медијана	205,0	59,0	0,285	25,0	0,12	11,0	0,051
Стандардно одступање	84,56	18,693	0,047	9,499	0,038	6,438	0,024
Коефицијент варијације	39,48	30,95	16,66	36,03	29,89	56,54	45,24
Варијанса	7150,5	349,42	0,002	90,233	0,001	41,442	0,001
Коеф. асиметрије	9,97	1,78	-0,118	2,748	1,459	5,023	3,310
Коеф. спљоштености	162,32	14,55	0,53	16,81	5,43	54,06	31,91
Интервал	1913	304	0,452	132	0,361	109	0,375
Минимум	41	10	0,083	4	0,026	1	0,0045
Максимум	1954	314	0,536	136	0,386	110	0,38

У наредном кораку, за потребе примене метода форензичке анализе, извршена је селекција података, како би се одговарајући модели могли применити у циљу унапређења организације и поступања у домену форензичке експертизе. Детаљан опис ових КД, заједно са њиховом учестаношћу, дат је у табели 3-3.

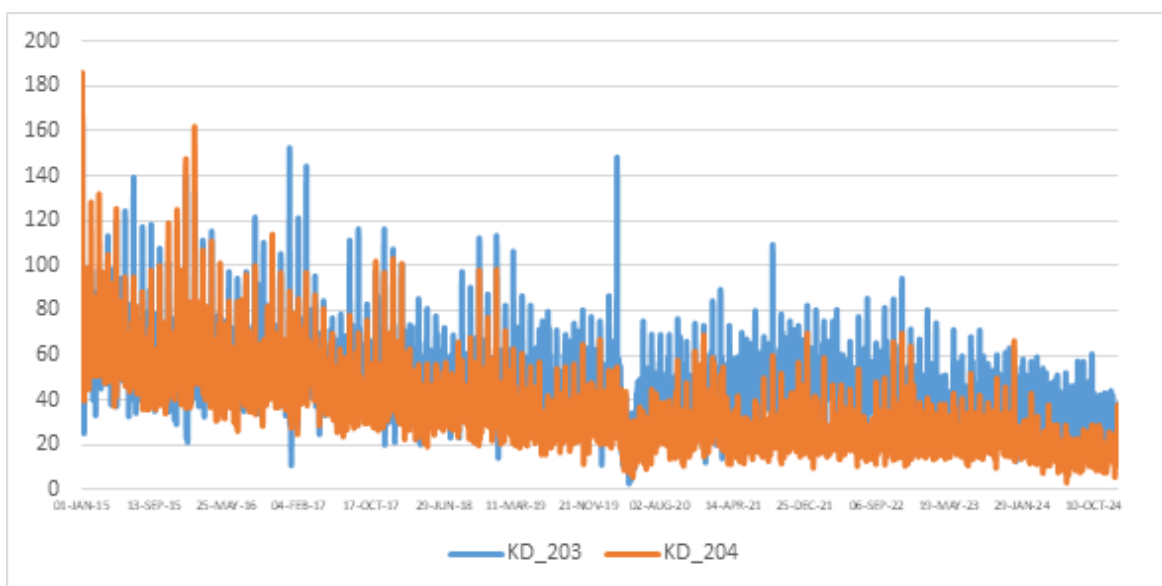
Табела 3-3. Преглед броја и учесталости КД у периоду 2015-2024

Члан КЗ	Назив дела	Број дела	% заступљености
203	Крађа	172.259	22,05
204	Тешка крађа	128.480	16,42
241	Фалсификовање новца	390	0,05
242	Фалсификовање хартија од вредности	285	0,04
243	Фалсификовање и злоупотреба платних картица	5.406	0,69
244	Фалсификовање знакова за вредност	126	0,02
355	Фалсификовање исправе	18.380	2,35
355	Фалсификовање исправе	18.380	2,35
356	Посебни случајеви фалсификовања исправе	3.731	0,48
357	Фалсификовање службене исправе	4.912	0,63

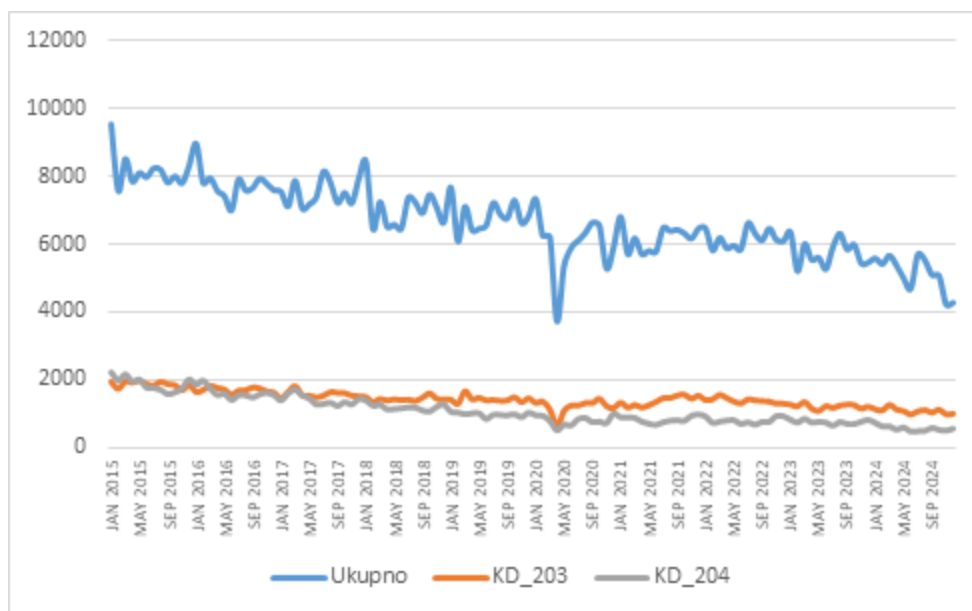
¹² Scale_ префикс представља вредности за нормализоване променљиве у односу на укупан број КД.

Као што се може уочити из претходне табеле, за даљу анализу изабрана су најпре дела према члану 203 и 204 Кривичног законика, која се односе на КД крађе и тешке крађе, респективно. Један од разлога избора ових КД лежи у чињеници да се код њих примењују се методе форензичких анализа усмерене ка идентификацији починилаца, укључујући анализу трагова са места извршења, утврђивање образаца извршења, повезивање релевантних сазнања и реконструкцију догађаја кроз примену модела и симулација догађаја. На тај начин, КД по члану 203 и 204 Кривичног законика, као дела која могу захтевати значајно укључивање метода форензичке анализе, изабрана су за примену метода математичког моделовања. Приказ учесталости КД 203 и 204 на дневном нивоу дат на слици 3-2, док је за потребе даљег истраживања извршена и агрегација укупног броја ових КД по месецима, чији је графички приказ дат на слици 3-3.

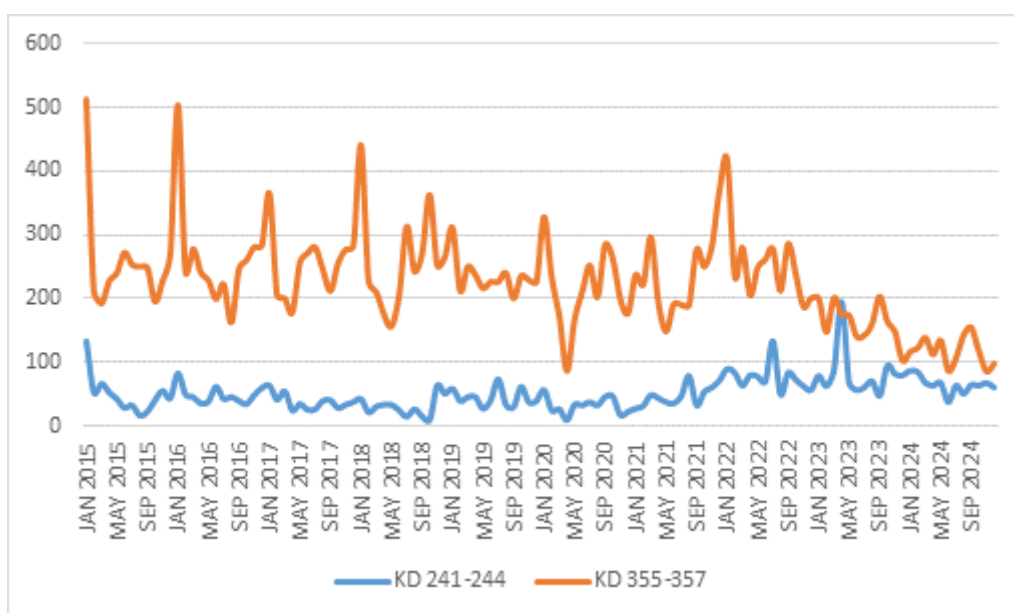
С друге стране, за потребе истраживања су одабрана и КД по члановима 241-244, односно 355-357 Кривичног законика, која се односе на фалсификовање и као таква захтевају посебну форензичку експертизу за њихово доказивање. Имајући у виду знатно мањи број КД фалсификовања у односу на претходна КД, њихова динамика, од КД 241 до 244, односно од КД 355 до 357, дата је на слици 3-4 према учесталостима на месечном нивоу. Притом, истакнимо да су за у неким анализама коришћени и подаци о евидентираним КД овог типа на дневном нивоу.



Слика 3-2. Приказ заступљености кривичних дела крађе (КД 203) и тешке крађе (КД 204) у посматраном скупу података (дневни ниво)



Слика 3-3. Приказ односа учесталости КД по чл 203 и 204 према укупном броју евидентираних КД (месечни ниво)



Слика 3-4. Збирни приказ КД везаних за фалсификовање (месечни ниво)

У циљу јаснијег приказа и сагледавања структуре података у посматраном узорку, у табели 3-4 је дата дескриптивна статистичка анализа учесталости претходно наведених КД, посматраних у облику временских серија дане на месечном нивоу. На основу тога се могу уочити сличности и разлике у учесталостима посматраних кривичних дела.

Табела 3-4. Преглед дескриптивних података за одређена КД у посматраном узорку (месечни ниво)

	Обим	Ср. вред.	Медијана	Ст. девијација	Коеф. асимет.	Коеф. спљошт.	Min	Max
Укупно	120	6.653,18	6.506,00	1.042,27	-0,018	-0,095	3.737	9.538
KD_203	120	1.435,49	1.420,50	258,27	0,098	0,079	614	2.003
KD_204	120	1.070,67	943,50	428,30	0,776	-0,307	459	2.22
KD 241-244	120	206,73	148,00	142,16	1,405	1,455	57	636
KD_355-357	120	225,19	226,00	74,37	1,045	2,982	85	513

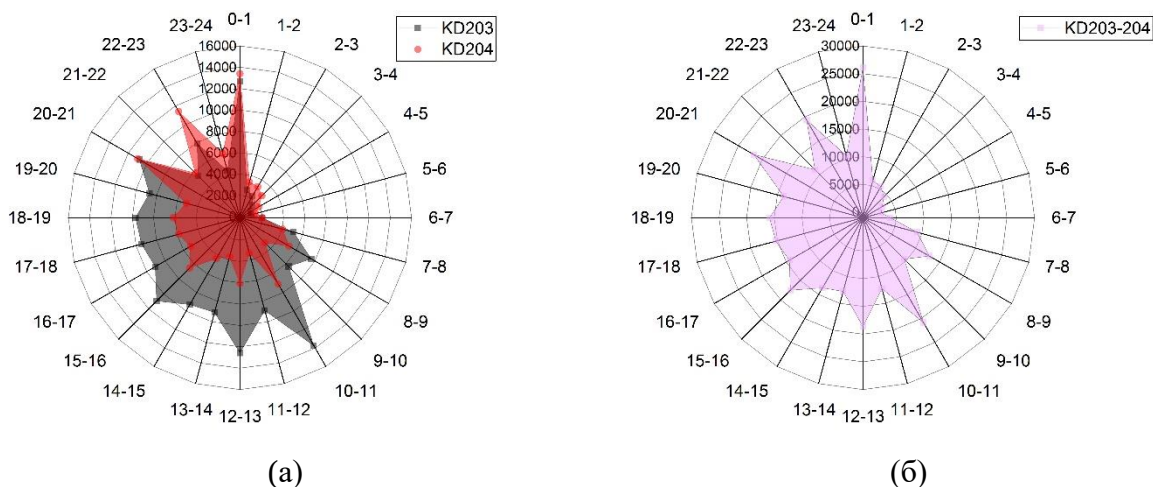
Треба истаћи да изабрана КД припадају категоријама код којих се у пракси примењују методе форензичког инжењерства, као што су трасологија, дактилоскопија, ДНК анализа, хемијске анализе, балистичка и дигитална форензика. Оне су већ описане у претходном одељку и, како је речено, представљају основ за избор временских серија над којима се примењују предложени математички модели.

3.2 ВРЕМЕНСКА ДИСТРИБУЦИЈА

Временска дистрибуција КД представља један од најважнијих аспеката анализе криминалних активности, јер омогућава сагледавање њихове динамике, идентификацију временских законитости и откривање образаца који нису непосредно уочљиви једноставним посматрањем података. За разлику од дескриптивне анализе, којом се утврђује укупна учесталост појединих кривичних дела, анализа временске дистрибуције омогућава испитивање начина на који се криминалне активности мењају током времена, што представља полазну основу за примену стохастичких модела и развој система форензичке аналитике.

Са становишта форензичког инжењерства, временска компонента има вишеструки значај. Она омогућава идентификацију периода повећане учесталости извршења КД, уочавање сезонских и дугорочних трендова, као и процену интензитета оптерећења форензичких капацитета. Такве информације имају непосредну примену приликом организације увиђајних екипа, планирања лабораторијских анализа, распоређивања кадровских ресурса и доношења одлука које се односе на ефикасније функционисање форензичке подршке. Истовремено, временска анализа представља неопходан предуслов за изградњу математичких модела који омогућавају описивање и прогнозирање динамике криминалних активности.

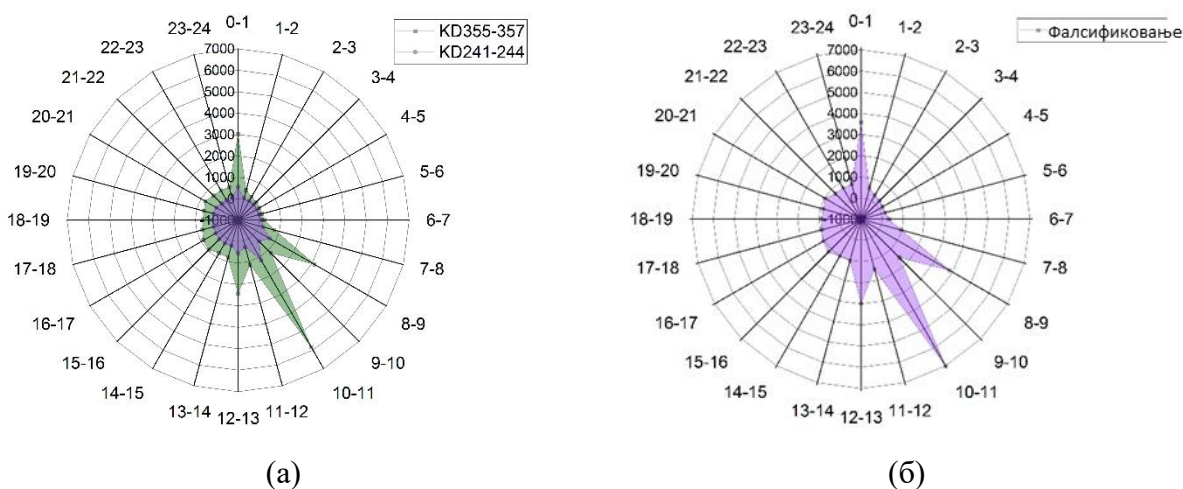
У складу са постављеним циљевима истраживања, временска анализа спроведена је над кривичним делима која су у претходном одељку издвојена као репрезентативна за примену метода форензичког инжењерства. Посебна пажња посвећена је најпре КД крађе (чл. 203 КЗ) и тешке крађе (чл. 204 КЗ), као најзаступљенијим категоријама у анализираном скупу података, док су засебно анализиране и категорије КД које се односе на различите облике фалсификовања, чије доказивање подразумева примену специјализованих форензичких метода. На слици 3-5 приказана је временска дистрибуција ова два КД, у облику тзв. поларних дијаграма, а према времену извршења у току дана. Анализа показује да обе категорије кривичних дела испољавају изражену временску зависност, што указује да њихово извршење није равномерно распоређено током дана, већ прати препознатљиве обрасце понашања извршилаца.



Слика 3-5. Дистрибуција извршења дела (КД 203, КД204) према времену у току дана у посматраном узорку: (а) појединачно, (б) збирно

Прецизније, код оба типа кривичних дела уочава се највећа учесталост у касним вечерњим и ноћним часовима, посебно у периоду од 22:00 до 01:00 часа, након чега број регистрованих догађаја постепено опада током ноћи и достиже минимум у раним јутарњим часовима. Од почетка дневних активности учесталост поново расте, при чему се код кривичног дела крађе уочава и израженији пораст током преподневних и раних поподневних часова, док је код тешких крађа овај ефекат знатно мање наглашен. Оваква разлика може указивати на различиту природу извршења ова два кривична дела, јер се крађе чешће извршавају у условима интензивније дневне активности становништва, док су тешке

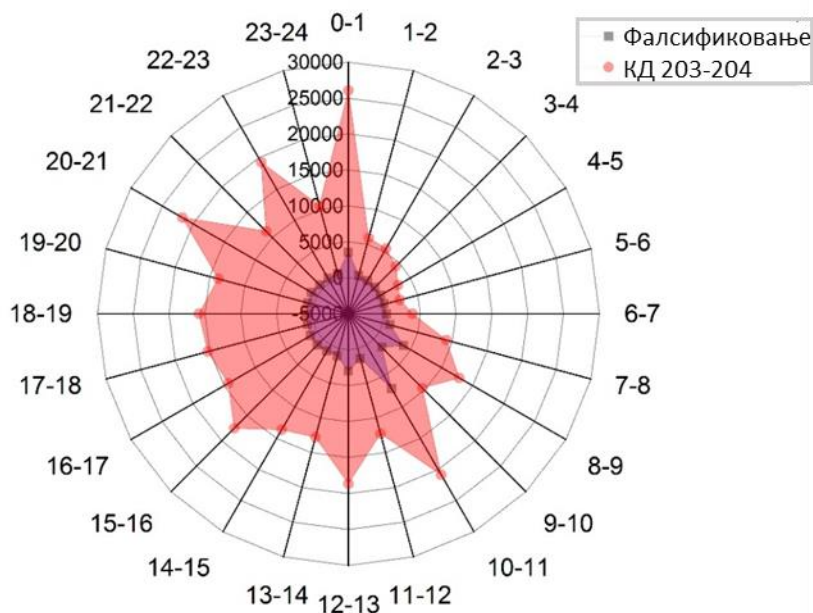
крађе у већој мери повезане са периодима смањеног присуства власника или корисника објеката. Посматрано у целини, временске дистрибуције обе категорије показују висок степен сличности, што указује на постојање заједничких криминолошких и оперативних образаца. Истовремено, уочене разлике у интензитету појединих временских интервала указују да је оправдано њихово одвојено моделовање, јер различита динамика може утицати на избор адекватног математичког модела и каснију интерпретацију добијених резултата.



Слика 3-6. Дистрибуција извршења дела (КД241-244 и КД355-357) према времену у току дана у посматраном узорку: (а) појединачно, (б) збирно

За разлику од кривичних дела крађе и тешке крађе, временска дистрибуција КД која се односе на фалсификовање (чл. 241–244 и 355–357 КЗ), приказана на слици 3-6, показује битно другачију структуру. Учесталост ових КД је значајно мања, али су временски обрасци израженији и концентрисанији. Највећи број регистрованих случајева јавља се током редовног дневног радног времена, са израженим максимумом у интервалу од приближно 9:00 до 12:00 часова, док је учесталост током ноћних часова релативно мала. Такав распоред је очекиван, имајући у виду да су ова КД најчешће повезана са коришћењем или контролом службених исправа, финансијских докумената, платних картица и других исправа чија се употреба доминантно одвија током радног времена институција, банака и привредних субјеката. У поређењу са КД крађе, временска дистрибуција фалсификовања показује мању варијабилност и већу концентрацију у ограниченом делу дана, што указује на постојање специфичних оперативних образаца карактеристичних за ову групу кривичних дела.

Ради свеобухватнијег сагледавања временских карактеристика анализираних категорија кривичних дела, на слици 3-7 дат је њихов збирни приказ. Упоредна анализа показује да се временски профили ове две групе кривичних дела јасно разликују. Док су крађе и тешке крађе претежно концентрисане у вечерњим и ноћним часовима, кривична дела фалсификовања су доминантно везана за дневне активности. Таква временска раздвојеност указује да различити облици криминалитета прате различите механизме извршења, што има непосредан значај са аспекта организације форензичког рада.



Слика 3-7. Дистрибуција извршења дела према времену у току дана у посматраном узорку

Практично посматрано, добијени резултати могу бити значајни за планирање ангажовања увиђајних екипа, криминалистичких техничара и лабораторијских капацитета. Познавање периода повећане вероватноће извршења појединих категорија кривичних дела омогућава ефикаснију организацију дежурстава, рационалније коришћење расположивих ресурса и благовремено покретање форензичких анализа. Истовремено, идентификовани временски обрасци представљају важан емпиријски основ за примену стохастичких модела временских серија, који ће у наставку рада бити коришћени за описивање, анализу и прогнозирање динамике криминалних активности.

Посматране временске дистрибуције указују на чињеницу да се анализиране категорије КД не јављају случајно током дана, већ испољавају јасно изражене временске обрасце. На

тај начин, време представља значајну објашњавајућу компоненту криминалних активности, која може бити искоришћена како за форензичку анализу, тако и за развој математичких модела њихове динамике.

Код КД крађе и тешке крађе доминирају вечерњи и ноћни часови, када је природни надзор над стамбеним и пословним објектима смањен, а могућност непримећеног деловања учинилаца већа. Истовремено, током дневног периода уочава се постепени пораст учесталости, који је код кривичног дела крађе израженији него код тешке крађе. То указује да ова два облика криминалитета, иако блиско повезана, не поседују потпуно идентичну временску структуру, што оправдава њихово одвојено статистичко и стохастичко моделовање.

Са друге стране, КД која се односе на фалсификовање показују битно другачију временску организацију. Највећа учесталост ових кривичних дела јавља се током радног времена, што је у складу са чињеницом да су најчешће повезана са употребом финансијских инструмената, јавних исправа, платних картица и других докумената чија се примена доминантно одвија у оквиру рада институција, привредних субјеката и јавних служби. За разлику од имовинских деликата, код којих је време извршења често условљено одсуством оштећених лица, код фалсификовања је временски образац у већој мери условљен функционисањем институционалног система.

Посебно је значајно да упоредна анализа показује да различите категорије КД имају различите временске профиле. То указује да временска компонента није само дескриптивно обележје скупа података, већ носи информацију о начину извршења кривичних дела, условима у којима се она најчешће дешавају и факторима који утичу на њихову динамику. Управо због тога временске серије представљају погодну основу за примену математичко-стохастичких модела, чији је циљ да формално опишу уочене закономерности, идентификују структурне промене и омогуће прогнозирање будућих кретања.

Резултати временске анализе показују да динамика анализираних категорија кривичних дела није случајна, већ испољава јасно дефинисане временске законитости и структурне промене. Управо ове карактеристике представљају полазну основу за развој и примену математичко-стохастичких модела приказаних у наставку рада. У наредним поглављима биће представљене модификације постојећих и новоразвијени модели намењени

описивању, анализи и прогнозирању динамике криминалних активности, као и њихова примена на подацима Министарства унутрашњих послова Републике Србије.

Са аспекта форензичког инжењерства, добијени резултати имају и непосредан практични значај. Познавање временских интервала у којима се поједине категорије кривичних дела најчешће јављају омогућава рационалније планирање рада увиђајних екипа, криминалистичких техничара и форензичких лабораторија, као и ефикасније распоређивање људских и техничких ресурса. На стратешком нивоу, овакве анализе представљају један од основних извора информација за форензичку интелигенцију, јер омогућавају да се историјски подаци трансформишу у квантитативне показатеље који подржавају доношење одлука заснованих на доказима.

Иако сама временска дистрибуција не омогућава идентификацију учинилаца нити реконструкцију појединачног догађаја, она открива законитости које нису уочљиве приликом анализе изолованих случајева. Управо прелазак са анализе појединачног кривичног дела на анализу великог броја временски повезаних догађаја представља суштинску разлику између класичне форензичке експертизе и савремене форензичке аналитике. На тај начин временске серије постају не само средство статистичког описивања криминалитета, већ и основа за изградњу математичких модела који омогућавају квантификацију динамике криминалних активности и подршку форензичкој интелигенцији.

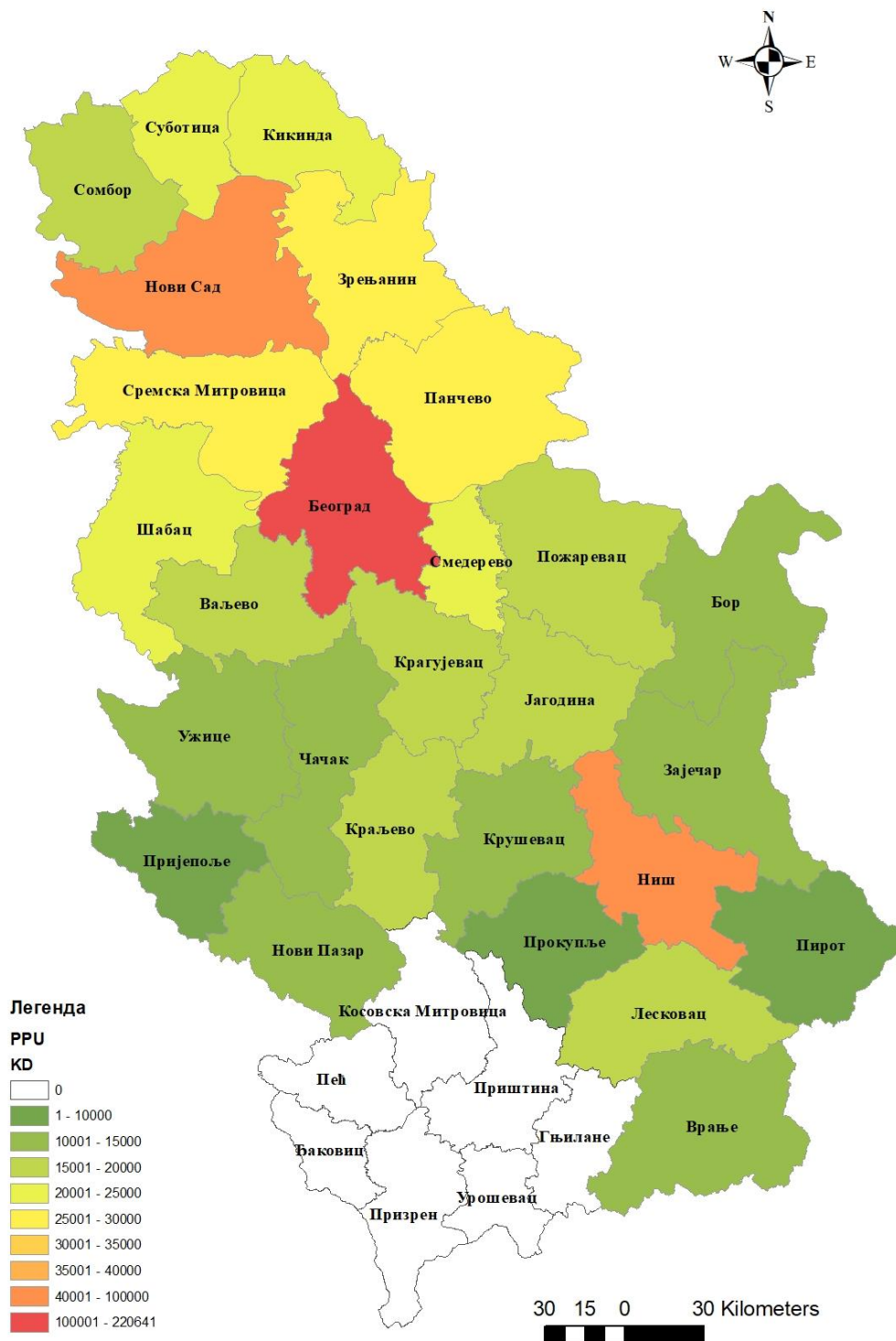
3.3 ПРОСТОРНА ДИСТРИБУЦИЈА

Поред временске дистрибуције криминалних активности, значајан аспект анализе представља и њихова просторна дистрибуција. Док временска анализа омогућава одговор на питање *када* се кривична дела најчешће дешавају, просторна анализа омогућава утврђивање *где* се она концентришу и да ли постоје просторне законитости које могу бити од значаја за форензичко инжењерство, криминалистичку аналитику и организацију форензичких капацитета. Просторна компонента стога не представља само географски приказ података, већ важан извор информација о структури и динамици криминалних активности (Milić, 2015).

Табела 3-5. Преглед процентуалне заступљености КД у посматраном узорку према територијалној дистрибуцији

Р. бр.	Подручје евидентираног КД	%
1.	Београд	28,2
2.	Бор	1,6
3.	Чачак	1,9
4.	Јагодина	2,0
5.	Кикинда	3,0
6.	Крагујевац	2,4
7.	Краљево	2,2
8.	Крушевац	1,6
9.	Лесковац	2,1
10.	Ниш	5,3
11.	Нови пазар	1,9
12.	Нови сад	12,3
13.	Панчево	3,3
14.	Пирот	1,1
15.	Пожаревац	2,1
16.	Пријеполје	,7
17.	Прокупље	1,1
18.	Шабац	3,1
19.	Смедерево	2,6
20.	Сомбор	2,2
21.	Сремска Митровица	3,6
22.	Суботица	3,2
23.	Ужице	1,7
24.	Ваљево	1,9
25.	Врање	1,6
26.	Зајечар	1,9
27.	Зрењанин	3,7
28.	ОЈ у седишту Министарства	1,6
	Укупно	100,0

У овом истраживању просторна анализа заснива се на подацима о евидентираним кривичним делима према територијалној надлежности подручних полицијских управа Републике Србије. Преглед процентуалне заступљености кривичних дела приказан је у табели 3-5, док је њихова просторна расподела визуализована на слици 3-8. Анализа територијалне структуре показује да је расподела евидентираних кривичних дела изразито неравномерна. Највећи удео регистрован је на подручју Полицијске управе за град Београд (28,2%), затим на подручју Новог Сада (12,3%) и Ниша (5,3%), док већина осталих подручних полицијских управа бележи значајно мање процентуално учешће.



Слика 3-8. Приказ просторне дистрибуције учесталости КД у посматраном узорку

Оваква просторна неравномерност очекивана је имајући у виду различиту густину насељености, степен урбанизације, концентрацију становништва, економских активности и

административних функција. Истовремено, она указује и на различит интензитет оптерећења полицијских и форензичких служби на територији Републике Србије. Додатно, слика 3-8 пружа јаснији увид у просторни распоред анализираних података. Просторна анализа показује да су највеће концентрације кривичних дела везане за највеће урбане центре, док су периферна и мање насељена подручја карактерисана знатно мањом учесталостју. Међутим, сама визуелизација просторне расподеле није довољна да би се закључило да ли постоји просторна зависност између суседних подручја. Због тога је, поред картографског приказа, неопходно применити и одговарајуће методе просторне статистике које ће бити детаљније приказане у наставку.

У ту сврху, примењени су Географски информациони системи (GIS)¹³, који омогућавају интеграцију просторних података, њихову визуелизацију и квантитативну анализу. За разлику од класичних статистичких поступака, GIS омогућава да се криминални догађаји посматрају као просторни процеси, при чему је могуће анализирати њихову просторну концентрацију, идентификовати потенцијалне зоне повећаног ризика и испитати међусобну просторну повезаност анализираних појава. У контексту форензичког инжењерства, овакве анализе представљају основу за процену просторног оптерећења форензичких капацитета и планирање организације рада форензичких служби.

Једно од основних питања просторне анализе јесте да ли су кривична дела распоређена случајно или испољавају тенденцију просторног груписања. У циљу испитивања овог питања примењен је тзв. *Моранов коефицијент просторне аутокорељације*, који представља једну од најчешће коришћених мера за процену просторне зависности (Moran, 1950). Моранов коефицијент или Моранов индекс (I) дефинише се изразом:

$$I = \frac{n}{W} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

где је:

- n – број посматраних просторних јединица,
- x_i – вредност посматране променљиве у јединици (i),
- $\bar{x}$ – средња вредност променљиве,

¹³ ArcGIS 10.x

- w_{ij} – елемент матрице просторних тежина који описује просторни однос између јединица i, j ,
- $W = \sum_i \sum_j w_{ij}$ – збир свих просторних тежина.

Вредности Морановог коефицијента се налазе у интервалу од $-1 \leq I \leq 1$, при чему се оне интерпретирају на следећи начин:

- $I > 0$ указује на присуство позитивне просторне аутокорељације, што значи да сличне вредности формирају просторне кластере односно постоји просторна повезаност.
- $I \approx 0$ – просторни распоред је случајан, без изражене аутокорељације, односно без просторне зависности.
- $I < 0$ – негативна просторна аутокорељација, што значи да суседне локације имају различите вредности, односно присутна је просторна дисперзија.

Резултати анализе у овој студији показали су да Моран-ов коефицијент износи $I = 0,09$, што указује на постојање слабе позитивне просторне аутокорељације, при чему је добијена p -вредност од 0,144 која показује на то да ова зависност није статистички значајна (на нивоу значајности од 0,05). Према томе, не постоје довољни статистички аргументи да се одбаци нулта хипотеза о случајном (некорелисаном) просторном распореду учесталости КД на нивоу подручних полицијских управа. Другим речима, иако се визуелно уочавају подручја са већом концентрацијом криминалних активности, на анализираном нивоу просторне агрегације није потврђено постојање стабилног просторног обрасца.

Овакав резултат не треба тумачити као недостатак просторне структуре криминалитета, већ пре као последицу избора просторне јединице анализе. Подручне полицијске управе представљају релативно велике и хетерогене просторне целине које обухватају урбана, приградска и рурална подручја. Због таквог нивоа агрегације локални просторни обрасци могу остати прикривени, иако постоје на нижим просторним нивоима. Из тог разлога, будућа истраживања могла би бити усмерена ка анализи просторне дистрибуције на нивоу општина, градских зона или појединачних локација кривичних догађаја, као и ка интеграцији просторне и временске компоненте криминалних активности.



Слика 3-9. Приказ просторне дистрибуције КД у посматраном периоду (1 тачка – 100 КД)

На слици 3-9 приказана је просторна расподела анализираних КД у облику тачкасте мапе, при чему једна тачка представља приближно сто евидентираних кривичних дела. За

разлику од претходне тематске карте, која приказује агрегиране вредности по подручним полицијским управама, овај приказ омогућава непосредније сагледавање просторне концентрације криминалних активности и њиховог релативног интензитета.

Визуелном анализом уочава се изразита концентрација догађаја на подручју Београда, као и повећана густина у ширим урбаним зонама Новог Сада и Ниша. Истовремено, већина осталих подручја карактерише се знатно равномернијим и ређим распоредом догађаја. Оваква просторна структура потврђује да је интензитет криминалних активности у великој мери повезан са степеном урбанизације, концентрацијом становништва и интензитетом друштвених и економских активности.

Посебан значај оваквог начина приказивања података огледа се у томе што омогућава брзу визуелну идентификацију подручја повећаног оптерећења форензичких служби. Док агрегирани статистички показатељи пружају информацију о укупној учесталости кривичних дела, просторна густина догађаја омогућава сагледавање потенцијалних зона у којима се може очекивати већа потреба за ангажовањем увиђајних екипа, криминалистичких техничара и форензичких лабораторија.

Стога, иако приказ на слици 3-9 има пре свега дескриптивни карактер, он представља важну основу за примену напредних метода просторне аналитике, као што су анализа густине, идентификација просторних кластера и развој просторно-временских модела криминалних активности. Управо интеграцијом оваквих просторних информација са временским серијама и математичко-стохастичким моделима могуће је изградити системе форензичке интелигенције који, поред описивања постојећег стања, омогућавају и предвиђање будућих образаца криминалитета.

Са становишта форензичког инжењерства, просторна анализа има далеко шири значај од саме визуелизације криминалних догађаја. Њеном интеграцијом са временским, криминалистичким и другим форензичким подацима омогућава се идентификација просторно-временских образаца криминалитета, процена оперативног ризика и рационалније планирање ангажовања форензичких ресурса. Истовремено, просторни подаци представљају важан улаз у системе форензичке интелигенције, у којима се историјски подаци трансформишу у аналитичке информације значајне за подршку одлучивању.

Просторна анализа, међутим, сама по себи не обезбеђује потпун опис криминалних активности. Њена пуна аналитичка вредност остварује се тек интеграцијом са временском анализом и математичко-стохастичким моделима. Управо таква интеграција представља основну методолошку идеју ове дисертације. Полазећи од уочених временских и просторних законитости, у наредним поглављима биће представљени модификовани и новоразвијени стохастички модели за описивање, анализу и прогнозирање динамике криминалних активности, као и њихова примена на подацима Министарства унутрашњих послова Републике Србије.

4. ДЕТЕРМИНИСТИЧКИ МОДЕЛ КРИМИНАЛНИХ АКТИВНОСТИ

Криминал је одувек био један од најважнијих проблема људског друштва. Стога не чуди што истраживачи, у покушају да разумеју начин на који криминал настаје и обликује се, посвећују значајну пажњу овој теми. Стога употреба математичких метода за разумевање и моделовање криминалних активности јесте актуелна проблемска област у свету, која привлачи пажњу истраживача последњих година (Ñuño, Herrero, & Primicerio, 2008; Short, et al., 2008; Sooknanan, Bhatt, & Comissiong, 2013; Tsardakas, 2021; Ñuño, Herrero, & Primicerio, 2011). Показало се, између осталог, да су модели засновани на системима обичних диференцијалних једначина (ОДЈ) и парцијалних диференцијалних једначина (ПДЈ) били међу најуспешнијим моделима криминалитета у савременим светским истраживањима (Ghotbi, Mohammadzade, Avaei, & Keyvanipoor, 2007; Falaye, A. и сар., 2017; Mayilvaganan & Balamuralitharan, 2018; Mhadhbi, Gana, & Alsaeedi, 2024). Овакви модели најчешће представљају тзв. спрегнуте системе *диференцијалних једначина дифузионог типа*, које описују промене броја криминалних активности, односно њихових извршилаца, у одређеном временском периоду и на датом простору (Lacey & Tsardakas, 2016; Raimundo, Yang, Rubio, Greenhalgh, & Massad, 2023; Tsardakas, 2021).

Посебан акценат овде је дат формирању и анализи потенцијално новог облика и модела, приказаног у (Стојичић, С. и сар., 2025), који је заснован на специфичностима облика и динамике одабраних криминалних активности на простору Републике Србије. Примена овако добијеног модела може, такође, бити усмерена ка формирању и развоју система за подршку спровођења форензичких анализа и идентификацији потенцијалних образаца и трендова, који могу бити употребљени за оптимизацију коришћења ресурса за смањење ризика од настанка криминалних активности, као и за оптимизацију и управљање техничким и технолошким форензичким ресурсима потребних за њихово откривање. То су, као што је већ речено, кривична дела за која се у већој мери примењују биометријске методе за идентификацију лица, методе за анализу трагова са лица места, као и методе дигиталне форензике. Најзад, сви резултати добијени практичном применом модела заснованих на НРМ-у су додатно верификовани у односу на основне податке из евиденција које се воде о кривичним делима.

4.1 МСА МОДЕЛ

Развој и анализа математичких модела везаних за анализу криминалних активности (у даљем тексту МСА модели) има значајан друштвени утицај, јер омогућава боље разумевање динамике криминала и потенцијално помаже у обликовању превентивних стратегија. У овом делу је истражен МСА модел детерминистичког типа, који је затим примењен у моделовању динамике криминалитета на посматраном узорку. Са практичног аспекта примене предложеног модела, разматрани су различити облици криминала, и то почев од општег, па све до његових различитих специфичних облика, а пре свега КД која су од интереса са аспекта форензичког инжењерства. Потом је анализиран степен заступљености у посматраном узорку како би се извршила практична провера модела.

4.1.1 Дефиниција проблема и МСА модела

Као што је већ истакнуто раније, основни циљ у овом делу јесте добијање теоријско-математичког модела који се може применити за анализу динамике криминала, односно модела који описује његову еволуцију и показује понашање блиско стварном стању догађаја везаних за криминалне активности. Полазећи од сличних претпоставки као у (Lacey & Tsardakas, 2016; Tsardakas, 2021), означимо са $c(t) \geq 0$, укупан број починилаца криминалних активности у одређеном подручју у времену $t \geq 0$. Штавише, као што је наведено у (Short, и други, 2008; Short, Möhler, Brantingham, & Tita, 2014), понашање починилаца криминалних активности најчешће је условљено такозваном *атрактивношћу подручја*, која представља могућност да ће криминалац деловати у одређеном тренутку на одређеном подручју. Да би се повећала флексибилност МСА модела, претпоставља се да атрактивност не зависи само од понашања активних починилаца, већ и од других фактора, као што су време, карактеристике посматраног подручја или врста почињеног кривичног дела. На овај начин, атрактивност се може представити, као збир двеју компоненти:

- $a(t) \geq 0$ означава „унутрашњи“ део атрактивности, који не зависи од понашања криминалаца, већ од осталих горе поменутих фактора;
- $b(t) \geq 0$ представља „динамички“ део атрактивности изазван криминалном активношћу.

Очигледно је да се обе компоненте $a(t)$ и $b(t)$ могу посматрати као функције времена (t) , при чему се прва, „унутрашња“ компонента често представља као константна вредност. То, прецизније, значи да би промене у атрактивности услед фактора на које не утиче криминална активност (нпр. доба дана или месеца у којем је забележена) тада биле објашњене „унутрашњом“ атрактивношћу $a(t)$. С друге стране, ако сазнања о кривичним делима почињеним у неком подручју подстиче на то да се догоди више злочина, или, обрнуто, ако се, рецимо, број полицајаца у одређеном подручју мења у складу са бројем почињених кривичних дела, овај ефекат би тада био представљен динамичком компонентом $b(t)$.

Размотримо сада зависност укупног броја криминалних активности $c(t)$ од горе поменутих компоненти $a(t)$ и $b(t)$. Притом, треба напоменути да се у неком тренутку t одређени број починилаца КД уклања из система (услед задржавања, притвора, затворске казне, итд.), док се други починиоци појављују у систему (због пуштања из затвора или појаве нових криминалаца). Сходно томе, може се претпоставити да је стопа смањења криминалних активности пропорционална производу укупне атрактивности и броја криминалних активности, тј. да има облик $\kappa c(t)(a(t) + b(t))$, где је $\kappa > 0$ одговарајућа константа пропорционалности. С друге стране, слично као у (Lacey & Tsardakas, 2016), претпостављамо даље да постоји стална тенденција повећања криминалне активности, што ће, ради једноставности, бити означено са $\gamma > 0$. На овај начин, еволуција броја кривичних дела током времена описана је следећом једначином:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \gamma - \kappa c(t)(a(t) + b(t)). \quad (4.1)$$

Како бисмо математички моделовали динамички део атрактивности криминалних активности, представљен функцијом $b(t)$, треба напоменути да свако почињено кривично дело у неком тренутку (t) повећава вредност $b(t)$. Стога, динамичка атрактивност расте са повећањем вредности $c(t)$ пропорционално укупном броју почињених кривичних дела, тј. облика је $\ell c(t)(a(t) + b(t))$, где је $\ell > 0$ константа пропорционалности. Поред тога, претпостављамо да $b(t)$ експоненцијално опада у времену, што се може представити следећом једначином:

$$\frac{db(t)}{dt} = \ell c(t)(a(t) + b(t)) - \omega b(t) \quad (4.2)$$

где је $\omega > 0$ (константна) стопа опадања атрактивности током времена. Истакнимо да су спрегнуте једначине (4.1)–(4.2) *дифузионог типа*, са тзв. *негативном повратном спрегом* између одређених функција и њихових извода, на шта је указао већи број аутора који се баве овом темом. На пример, када се број кривичних дела $c(t)$ повећава током времена, први члан на десној страни једначине (4.2) се такође повећава, што узрокује повећање динамичког дела привлачности $b(t)$. С друге стране, то ће тада изазвати смањење другог члана у једначини (4.1), односно смањење вредности извода $dc(t)/dt$. Очигледно је да је ово супротан ефекат почетног повећања вредности $c(t)$.

У наставку, у оквиру система спрегнутих једначина (4.1) и (4.2), уводимо следеће бездимензионе величине:

$$\hat{t} := t\omega, \quad \hat{a} := \frac{ka}{\omega}, \quad \hat{b} := \frac{\ell c}{\omega}, \quad \hat{c} := \frac{\ell c}{\omega}, \quad \hat{\gamma} := \frac{\ell \gamma}{\omega^2}.$$

Са овим члановима, МСА модел, приказан спрегнутим једначинама (4.1) и (4.2), трансформише се у следећи бездимензиони облик:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \gamma - c(t)(a(t) + b(t)), \quad (4.3)$$

$$\frac{db(t)}{dt} = c(t)(a(t) + b(t)) - b(t), \quad (4.4)$$

где су, ради једноставности, ознаке „ $\hat{}$ “ изостављене.

4.1.2 Егзистенција и јединственост решења

У наредном излагању, претпостављамо да решење система диференцијалних једначина (4.3)–(4.4) (у даљем тексту МСА систем) задовољава почетне (односно граничне) услове $b(0) = b_0 \geq 0$ и $c(0) = c_0 \geq 0$, који ће бити коришћени у даљој анализи. За тако дефинисан МСА систем, услови егзистенције и јединствености његовог (ненегативног) решења, као и услови равнотеже, могу се описати на следећи начин:

Теорема 4.1 (Стојичић, С. и сар., 2025). *Нека је МСА модел дат спрегнутим једначинама (4.3) и (4.4), при чему је $a(t) \geq 0$ бесконачно диференцијабилна (C^∞)*

функција, дефинисана за свако $t \in (0, \infty)$, док је $\gamma > 0$ је произвољна константа. Тада, за било које почетне услове $b(0) \geq 0$, $c(0) \geq 0$, МСА систем (4.3) – (4.4) има јединствено ненегативно решење $b(t) \geq 0$, $c(t) \geq 0$. Штавише, ако је $a = a(t) \geq 0$ константа, МСА систем има асимптотски стабилну тачку равнотеже (еквистријум):

$$(b^*, c^*) = \left(\gamma, \frac{\gamma}{\gamma + a} \right). \quad (4.5)$$

Доказ. Означимо функције на десним странама једначина система (4.3) – (4.4) у следећем, функционалном облику:

$$F(b, c) = (f_1(b, c), f_2(b, c)),$$

где је $f_1(b, c) = c(a + b) - b$ и $f_2(b, c) = \gamma - c(a + b)$. Очигледно је да је функција $F(b, c)$ диференцијабилна на целом скупу $\mathbb{R}^2$, тако да она задовољава Липшицов услов (2.9) у било којој околини произвољне тачке $(b_0, c_0) = (b(0), c(0))$, где је $b_0, c_0 \geq 0$. Према раније наведеној Пикар-Линделофовеј теореме (Теорема 2.3), следи постојање и јединственост решења наведеног Кошијевог проблема за дати почетни услов.

Додатно, може се показати да је за дате почетне услове $b(0) \geq 0$, $c(0) \geq 0$, јединствено решење система (4.3) – (4.4) налази унутар првог квадранта $\mathbb{R}_+^2 := \{(b, c) | b, c \geq 0\}$ равни $\mathbb{R}^2$. У том циљу, посматрајмо следећа два случаја:

- i) Ако важи $c(t_0) = 0$ за неко $t_0 \geq 0$, онда према једначини (4.3) следи да је $dc(t_0)/dt = \gamma > 0$. Стога, функција $c(t)$ расте у тачки t_0 и позитивна је у околини ове тачке.
- ii) Слично, ако важи $b(t_0) = 0$ за неко $t_0 \geq 0$, онда из једначине (4.4) добијамо $db(t_0)/dt = a(t_0)c(t_0) \geq 0$. Стога је функција $b(t)$ неоппадајућа у околини t_0 .

На основу наведеног, закључујемо да су позитивни делови координатних оса „одбојне ивице“ за обе функције $b(t)$ и $c(t)$, тј. да било које решење система (4.3) – (4.4) не може имати негативне вредности. Коначно, за константну вредност $a(t) = a \geq 0$, можемо одредити тачку равнотеже МСА система (4.3) – (4.4). Као што је познато, ова тачка представља решење, у односу на (b, c) , спрегнутих једначина:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{db(t)}{dt} = 0,$$

или, еквивалентно, $c(a + b) = \gamma = b$. Одавде очигледно следи да је једина тачка равнотеже баш она дата једначином (4.5), при чему у овом случају Јакобијан¹⁴ МСА система (4.3) – (4.4) гласи:

$$J(b, c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(b, c)}{\partial b} & \frac{\partial f_1(b, c)}{\partial c} \\ \frac{\partial f_2(b, c)}{\partial b} & \frac{\partial f_2(b, c)}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - 1 & a + b \\ -c & -(a + b) \end{bmatrix},$$

па у тачки равнотеже (b^*, c^*) , имамо да важи:

$$J(b^*, c^*) = \begin{bmatrix} -\frac{a}{a + \gamma} & a + \gamma \\ -\frac{\gamma}{a + \gamma} & -(a + \gamma) \end{bmatrix}.$$

Из овога следи да је траг Јакобијана¹⁵ у тачки равнотеже:

$$\tau := \text{tr}(J(b^*, c^*)) = -\frac{a}{a + \gamma} - (a + \gamma) < 0,$$

док је његова детерминанта:

$$\Delta := \det(J(b^*, c^*)) = a + \gamma > 0.$$

Према познатој чињеници (Hirsch, Smale, & Devaney, 2012, стр. 61-62), следи да је тачка равнотеже (b^*, c^*) заиста асимптотски стабилна за све вредности $a \geq 0$ и $\gamma > 0$. ■

У циљу провере стабилности МСА система (4.3) – (4.4) можемо, такође, тражити сопствене вредности $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ Јакобијана $J(b^*, c^*)$ као решења једначине:

$$\det(J(b^*, c^*) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\frac{a}{a + \gamma} - \lambda & a + \gamma \\ -\frac{\gamma}{a + \gamma} & -(a + \gamma) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Одавде се добија се следећа квадратна једначина:

¹⁴ Јакобијан представља матрицу парцијалних извода функција више променљивих које се налазе спрегнуте у облику система једначина. На тај начин, Јакобијан описује како се систем мења у околини неке тачке, тј. представља линеарну апроксимацију система око дате тачке.

¹⁵ Траг представља збир елемената на главној дијагонали неке матрице. На тај начин, он мери укупан „локални раст“, односно дивергенцију векторског поља у датој тачки. Траг и детерминанта Јакобијана се овде користе за анализу стабилности, односно конвергенције МСА система ка равнотежној тачки (еквилибријуму).

$$\lambda^2 + \frac{(a + \gamma)^2 + a}{a + \gamma} \lambda + a + \gamma = 0,$$

или, еквивалентно,

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0,$$

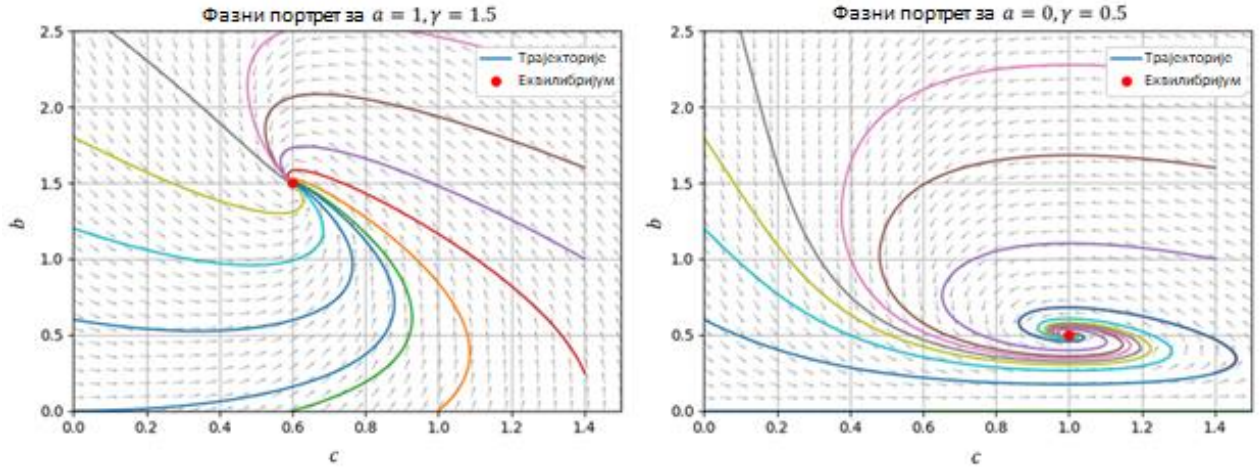
при чему смо користили нотацију из претходног доказа. Према познатим Вијетовим формулама, следи:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \tau < 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \Delta > 0,$$

тј. сопствене вредности λ_1, λ_2 имају негативне реалне делове. Ово такође имплицира (Adamu, 2022) да је равнотежна тачка (b^*, c^*) асимптотски стабилна за све $a \geq 0$ и $\gamma > 0$.

Притом, овде се могу разликовати следећа два случаја:

- Ако је дискриминанта $\tau^2 - 4\Delta \geq 0$, сопствене вредности λ_1, λ_2 су реалне и негативне, па се решења МСА система (4.3) – (4.4) експоненцијално приближавају тачки равнотеже (слика 4.1, лево).
- Када је $\tau^2 - 4\Delta < 0$, сопствене вредности су комплексно-коњуговане, са негативним реалним делом. Тада решења имају „спиралну“ конвергенцију ка тачки равнотеже (слика 4.1, десно).



Слика 4-1. Лево: Експоненцијална конвергенција решења МСА система када је $a > 0$. Десно: Спирална конвергенција ових решења када је $a = 0$. Извор: (Стојичић, С. и сар., 2025).

Према слици 4-1, генерисаној у програмском језику *Python*, видимо да се у оба случаја тачка равнотеже (b^*, c^*) налази унутар позитивног квадранта $\mathbb{R}_+^2 \subset \mathbb{R}^2$. Стога, она представљају тзв. *атрактор* МСА система (4.3) – (4.4), тј. тачку за коју важи:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = b^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c^*.$$

Дакле, када се МСА систем динамички мења и развија у времену, обе функције $b(t)$ и $c(t)$ теже ка тачки равнотеже (b^*, c^*) , независно од почетних услова. Штавише, веће вредности $a = a(t) > 0$ дају израженију конвергенцију, односно параметар a појачава „реакцију“ система и убрзава његову стабилизацију. Обрнуто, у граничном случају $a = 0$, према једначини (4.5), тачка равнотеже је $(b^*, c^*) = (\gamma, 1)$. За $\gamma < 4$ опствене вредности су тада комплексно-коњуговане, са негативним реалним делом, јер је $\tau^2 - 4\Delta = \gamma^2 - 4\gamma < 0$. Ова вредност је „ближа“ нули него у претходном случају, када је $a > 0$, што значи да се брзина конвергенције смањује, тј. тада постоји стабилно, али спорије, спирално „привлачење“ ка равнотежним вредностима. Приметимо да у том случају, слично као у доказу Теореме 4.1, из једнакости $b(t_0) = 0$, за неко $t_0 \geq 0$, следи $db(t_0)/dt = 0$. Дакле, t_0 је стационарна тачка функције $c(t)$, или је ова функција константна за свако $t \geq 0$.

4.2 РЕШАВАЊЕ МСА МОДЕЛА МЕТОДОМ ХОМОТОПСКИХ ПЕРТУРБАЦИЈА

Као што је већ речено, као основни поступак решавања поменутих једначина МСА модела (4.3) – (4.4) користи се *метод хомотопских пертурбација (НРМ)*, који спада у савремену технику решавања нелинеарних диференцијалних једначина различитих облика и форми. Већ смо истакли да НРМ представља снажан алат за аналитичко моделовање и решавање нелинеарних диференцијалних једначина. Његова флексибилност, могућност проширења и релативна једноставност чине га погодним за примене у бројним областима науке и инжењерства. Треба истаћи да данас постоје технике решавања проблема динамике криминалитета које се у већој или мањој мери заснивају на основним претпоставкама НРМ-а. Тако је, рецимо, у (Azuaba, Oluwafemi, Akinwande, Bako, & Dayar, 2022) описана примена НРМ технике у математичком моделовању злоупотреба психоактивних супстанци и насиља у породици, док је у (Falaye, A. и сар., 2017) анализирана динамика злонамерних сајбер напад на мобилну бежичну мрежу.

Ипак, у готово свим истраживањима која су се бавила применом НРМ-а у криминологији, аутори су користили само неколико почетних итерација у за добијање тзв. *апроксимативног НРМ-решења*, без општих резултата и закључака о квалитету ових решења, односно детаљне анализе њихове конвергенције. За разлику од претходно поменутих приступа, ова студија представља нови, оригинални приступ примене НРМ-а у решавању МСА модела, приказан у (Стојичић, С. и сар., 2025). Оригиналност примењеног поступка огледа се, пре свега, на испитивање стабилности, егзистенције и јединствености решења МСА модела. Осим тога, добијени низ НРМ (апроксимативних) решења је детаљно истражен са аспекта конвергенције ка стварном решењу МСА модела, а практична примена предложеног НРМ поступка је приказана над скупом реалних података који се односе на број кривичних дела у Републици Србији у претходном десетогодишњем периоду.

4.2.1 НРМ трансформација МСА модела

Основна идеја решавања МСА модела (4.3) – (4.4) применом НРМ-а састоји се у тзв. нормализацији бесконачног временског интервала $t \in (0, +\infty)$ трансформишући га у јединични интервал $(0,1)$. Слично као у (Кевкић & Стојановић, 2019), најпре примењујемо трансформацију временског аргумента $t(x) = \ln(1/x)$, тј. $x(t) = \exp(-t)$, где је $x \in (0,1)$. На тај начин, користећи једнакости $dt/dx = -1/x$ и $df/dt = -x df/dx$, које важе за било коју диференцијабилну функцију $f(t(x))$, МСА систем (4.3) – (4.4) се може трансформисати у следећи бездимензиони облик:

$$x \frac{d\rho(x)}{dx} - \rho(x)(\alpha(x) + \beta(x)) + \gamma = 0, \quad (4.6)$$

$$x \frac{d\beta(x)}{dx} + (\rho(x) - 1)\beta(x) + \alpha(x)\rho(x) = 0, \quad (4.7)$$

где је $x \in (0,1)$, $\alpha(x) := a(t(x))$, $\beta(x) := b(t(x))$, и $\rho(x) := c(t(x))$.

У следећем кораку, примењујемо НРМ технику на спрегнуте једначине (4.6)–(4.7), односно уводимо следеће две хомотопске функције:

$$R(x, p) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j \rho_j(x), \quad B(x, p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \beta_k(x), \quad (4.8)$$

где је $p \in [0, 1]$ параметар уграђивања. Да бисмо пронашли решење овако трансформисаног МСА система, датог једначинама (4.6) – (4.7), конструишемо следећи, хомотопски систем парцијалних диференцијалних једначина:

$$x \frac{\partial R(x, p)}{\partial x} - \alpha(x)R(x, p) + \gamma - pR(x, p)B(x, p) = 0, \quad (4.9)$$

$$x \frac{\partial B(x, p)}{\partial x} - B(x, p) + \alpha(x)R(x, p) + pR(x, p)B(x, p) = 0, \quad (4.10)$$

где су $R(x, p)$ и $B(x, p)$ непознате функције, дате једначинама (4.8). Према горе наведеном, када је $p = 0$, претходне једначине (4.9) – (4.10) постају:

$$x \frac{d\rho_0(x)}{dx} - \alpha(x)\rho_0(x) + \gamma = 0, \quad (4.11)$$

$$x \frac{d\beta_0(x)}{dx} - \beta_0(x) + \alpha(x)\rho_0(x) = 0. \quad (4.12)$$

Очигледно је да је овде реч о обичним диференцијалним једначинама првог реда, чијим решавањем, тј. применом једнакости (2.14), добијамо ттв. *почетно НРМ решење*:

$$\rho_0(x) = \exp\left(\int \frac{\alpha(x)dx}{x}\right) \left(C_0 - \gamma \int \frac{1}{x} \exp\left(-\int \frac{\alpha(x)dx}{x}\right) dx\right), \quad (4.13)$$

$$\beta_0(x) = x \left(D_0 - \int \frac{\alpha(x)\rho_0(x)}{x^2} dx\right), \quad (4.14)$$

где су C_0, D_0 константе, добијене на основу одговарајућих почетних (граничних) услова. С друге стране, када је $p = 1$, систем спрегнутих једначина (4.9) – (4.10) је очигледно еквивалентан трансформисаном МСА систему (4.6) – (4.7). У овом случају, према једначинама (4.8), решење овог система ће бити:

$$\rho(x) = \lim_{p \rightarrow 1^-} R(x, p) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x), \quad (4.15)$$

$$\beta(x) = \lim_{p \rightarrow 1^-} B(x, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(x), \quad (4.16)$$

под условом конвергенције оба горе наведена реда. Стога кажемо да функције дате једначинама (4.15) – (4.16) представљају *НРМ решење МСА система* (4.6) – (4.7).

У општем случају, за било које $p \in (0,1)$, НРМ решење спрегнутих једначина (4.9) – (4.10) се може изразити као степени ред по p , као што је дато у једначинама (4.8). Стога, заменом једначина (4.8) у једначине (4.9) – (4.10) и након преуређивања неких чланова у њима, добија се:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j \left(x \frac{d\rho_j(x)}{dx} - \alpha(x)\rho_j(x) \right) + \gamma - p \left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} p^j \rho_j(x) \right) \beta_k(x) \right) = 0, \quad (4.17)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k \left(x \frac{d\beta_k(x)}{dx} - \beta_k(x) + \alpha(x)\rho_k(x) \right) + p \left(\sum_{j=0}^{\infty} p^j \rho_j(x) \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k \beta_k(x) \right) = 0. \quad (4.18)$$

Одавде је јасно да изрази са степеном p^0 у једначинама (4.17) – (4.18) дају почетно НРМ решење, као што је дато у једначинама (4.11) – (4.12). Даље, изједначавање идентичних степена p^j , где је $j, k = 1, 2, \dots$, доводи до следећих система диференцијалних једначина:

$$x \frac{d\rho_j(x)}{dx} - \alpha(x)\rho_j(x) - \sum_{i=0}^{j-1} \rho_i(x) \beta_{j-i-1}(x) = 0, \quad (4.19)$$

$$x \frac{d\beta_k(x)}{dx} - \beta_k(x) + \alpha(x)\rho_k(x) + \sum_{j=0}^{k-1} \rho_j(x) \beta_{k-j-1}(x) = 0. \quad (4.20)$$

Очигледно, једначине (4.19) – (4.20) такође представљају обичне линеарне диференцијалне једначине првог реда. Стога, слично једначинама (4.11) и (4.12), оне се могу решити рекурзивно, наизменичним решавањем по $\rho_j(x)$ и $\beta_k(x)$ за било коју вредност $j, k = 1, 2, \dots$. На овај начин се добијају низови решења спрегнутог система једначина (4.19) – (4.20):

$$\rho_j(x) = \exp\left(\int \frac{\alpha(x)dx}{x}\right) \left(C_j + \int \frac{q_{j-1}(x)}{x} \exp\left(-\int \frac{\alpha(x)dx}{x}\right) dx\right), \quad (4.21)$$

$$\beta_k(x) = x \left(D_k - \int \frac{\alpha(x)\rho_k(x) + q_{k-1}(x)}{x^2} dx\right), \quad (4.22)$$

где су C_j, D_k константе и $q_k(x) := \sum_{j=0}^k \rho_j(x)\beta_{k-j}(x)$, за $k = 0, 1, 2, \dots$. На тај начин, заменом решења датих једначинама (4.13), (4.14), (4.21) и (4.22) у једначине (4.8), добија се НРМ решење хомотопског система спрегнутих једначина (4.9) – (4.10). Штавише, заменом истих решења у суме дефинисане једнакостима (4.15) – (4.16) добијамо *НРМ решење МСА система* диференцијалних једначина (4.6) – (4.7). Коначно, за произвољно $j, k = 0, 1, 2, \dots$, могу се дефинисати следеће тзв. *НРМ апроксимације* тако добијеног решења:

$$\hat{\rho}_j(x) := \sum_{i=0}^j \rho_i(x), \quad \hat{\beta}_k(x) := \sum_{j=0}^k \beta_j(x). \quad (4.23)$$

Очигледно је да $\hat{\rho}_j(x)$ и $\hat{\beta}_k(x)$, $j, k = 0, 1, 2, \dots$ представљају оцене непознатих функција $\rho(x)$ и $\beta(x)$, респективно, па се стога оне могу користити, под одређеним условима, као њихове апроксимације. У том циљу, треба напоменути да НРМ апроксимације, дате једначинама (4.23), као и НРМ решење (4.15) – (4.16), морају задовољавати исте граничне услове, добијене из почетних услова $b(0) = b_0 \geq 0$ и $c(0) = c_0 \geq 0$ у оквиру основног МСА система (4.3) – (4.4). Поновним коришћењем трансформације $x(t) = \exp(-t)$, при чему је $t \geq 0$, као нове граничне услове добијамо $\rho(1) = c_0 \geq 0$ и $\beta(1) = b_0 \geq 0$. Да би се осигурало да ове граничне услове истовремено задовољавају, како НРМ апроксимације (4.23), тако и НРМ решења (4.15) – (4.16), у даљем се претпоставља следеће:

- Константе C_0, D_0 у једначинама (4.13) и (4.14) су изабране тако да важе једнакости $\rho_0(1) = c_0$ и $\beta_0(1) = b_0$.
- Константе C_j, D_k , $j, k = 1, 2, \dots$ у једначинама (4.21) и (4.22) су изабране тако да важе једнакости $\rho_j(1) = \beta_k(1) = 0$.

4.2.2 Егзистенција и јединственост НРМ решења

Према горе наведеним претпоставкама, очигледно је да почетно НРМ решење, дато једначинама (4.13)–(4.14), као и НРМ апроксимације (4.23), задовољавају граничне услове еквивалентне онима које задовољавају права решења МСА система (4.6) – (4.7). На основу тога, неки довољни услови за конвергенцију тако добијених НРМ апроксимација могу се дати на следећи начин:

Теорема 4.2 (Стојичић, С. и сар., 2025). *Нека су $\{\rho_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{\beta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ низови непрекидних функција, дефинисаних једначинама (4.13) – (4.14) и (4.21) – (4.22) на јединичном интервалу $(0,1)$. Такође, претпоставимо да су следећи услови задовољени:*

(i) *Функција $\alpha(x)$ је ограничена на интервалу $(0,1)$, тј., постоји константа $M > 0$ тако да је $|\alpha(x)| \leq M$, за свако $x \in (0,1)$.*

(ii) *Низови $\{C_j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{D_k\}_{k=0}^{\infty}$ су апсолутно сумабилни, тј. важе једнакости:*

$$C := \sum_{j=0}^{+\infty} |C_j| < +\infty, \quad D := \sum_{k=0}^{+\infty} |D_k| < +\infty.$$

(iii) *Важи следећа неједнакост:*

$$D + Me \geq (CM + \gamma)e + 2(Me(CM + D + \gamma))^{1/2}. \quad (4.24)$$

Тада, низови НРМ апроксимација $\{\hat{\rho}_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\beta}_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, дефинисани једначинама (4.23), апсолутно и униформно конвергирају на интервалу $(0,1)$. Штавише, њихове граничне вредности су тада дате једначинама (4.15) – (4.16), респективно, тј. оне представљају решења МСА система датог једначинама (4.6) – (4.7).

Доказ. Најпре доказујемо конвергенцију низова $\{\hat{\rho}_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\beta}_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Према претпоставкама датим у теорему, као и на основу једначина (4.13)–(4.14), за почетна НРМ решења $\rho_0(x)$ и $\beta_0(x)$, за било које $x \in (0,1)$, добија се:

$$\begin{aligned} |\rho_0(x)| &\leq \exp\left(M \int \frac{dx}{x}\right) \left|C_0 - \gamma \int \exp\left(-M \int \frac{dx}{x}\right) \frac{dx}{x}\right| \leq x^M \left(|C_0| + \gamma \left|\int \frac{dx}{x^{M+1}}\right|\right) \leq A_0, \\ |\beta_0(x)| &\leq x \left|D_0 - \int \frac{\alpha(x)\rho_0(x)}{x^2} dx\right| \leq x \left(|D_0| + \left|\int \frac{\alpha(x)\rho_0(x)}{x^2} dx\right|\right) \leq x|D_0| + M|\rho_0(x)| \\ &\leq B_0, \end{aligned}$$

где је $A_0 := |C_0| + \gamma/M$ и $B_0 := |D_0| + MA_0 = |C_0|M + |D_0| + \gamma$. Даље, према једначини (4.21), за функцију $\rho_1(x)$ имамо:

$$|\rho_1(x)| \leq x^M \left(|C_1| + \left| \int \frac{\rho_0(x)\beta_0(x)}{x} dx \right| \right) \leq |C_1| + Q_0 f(x; M), \quad (4.25)$$

где је $Q_0 := A_0 B_0$ и $f(x; M) := x^M |\ln x| = -x^M \ln x$ је ненегативна функција на $x \in (0,1)$, која задовољава:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x; M) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x; M) = 0.$$

Дакле, функција $f(x; M)$ има максимум у тачки $x_0 \in (0,1)$, за коју важи $\partial f(x; M)/\partial x = 0$, односно $x_0 = \exp(-1/M)$. Одавде следи неједнакост $f(x; M) \leq f(x_0; M) = (Me)^{-1}$, која важи за било које $x \in (0,1)$, па њеном заменом у (4.25) добија се неједнакост $|\rho_1(x)| \leq A_1$, где је $A_1 := |C_1| + Q_0(Me)^{-1}$. Одавде, коришћењем једначине (4.22), следи:

$$|\beta_1(x)| \leq x \left(|D_1| + \left| \int \frac{\alpha(x)\rho_1(x) + \rho_0(x)\beta_0(x)}{x^2} dx \right| \right) \leq x|D_1| + MA_1 + A_0 B_0 \leq B_1,$$

где је $B_1 := |C_1|M + |D_1| + (1 + e^{-1})Q_0$.

У општем случају, коришћењем индуктивног метода, лако се може показати да за произвољно $j = 1, 2, \dots$ и $x \in (0,1)$ важе неједнакости $|\rho_j(x)| \leq A_j$ и $|\beta_j(x)| \leq B_j$, где је:

$$A_j := |C_j| + \frac{Q_{j-1}}{Me}, \quad B_j := |C_j|M + |D_j| + (1 + e^{-1})Q_{j-1}, \quad Q_j := \sum_{i=0}^j A_i B_{j-i}. \quad (4.26)$$

Сада, користећи дефиницију НРМ апроксимација $\hat{\rho}_k(x)$ и $\hat{\beta}_k(x)$, датих једнакостима (4.23), за произвољно $x \in (0,1)$ и $k = 1, 2, \dots$ имамо:

$$|\hat{\rho}_k(x)| \leq \sum_{j=0}^k |\rho_j(x)| \leq \sum_{j=0}^k A_j, \quad |\hat{\beta}_k(x)| \leq \sum_{j=0}^k |\beta_j(x)| \leq \sum_{j=0}^k B_j. \quad (4.27)$$

У граничном случају, када $k \rightarrow +\infty$, горе наведене неједнакости (4.27) постају:

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j(x) \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{\rho}_k(x)| \leq A, \quad \left| \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j(x) \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{\beta}_k(x)| \leq B. \quad (4.28)$$

Овде је $A := \sum_{j=0}^{\infty} A_j$ и $B := \sum_{j=0}^{\infty} B_j$, при чему на основу једнакости (4.26) важе следеће једначине (по непознатама $A > 0$ и $B > 0$):

$$C + \frac{\gamma}{M} + \frac{Q}{Me} = A, \quad CM + D + \gamma + (1 + e^{-1})Q = B, \quad (4.29)$$

где је:

$$Q := \sum_{j=0}^{\infty} Q_j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j A_i B_{j-i} \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} B_j \right) = AB.$$

Спрегнути систем једначина (4.29), након сређивања, може се представити на следећи начин:

$$A = \frac{CM + \gamma}{M - e^{-1}B}, \quad B^2 + ((CM + \gamma)e - (D + Me))B + Me(CM + D + \gamma) = 0. \quad (4.30)$$

Очигледно је да систем (4.30) има (бар једно) позитивно реално решење $A > 0$ и $B > 0$ ако важи:

$$D + Me > (CM + \gamma)e \wedge (D + Me - (CM + \gamma)e)^2 \geq 4Me(CM + D + \gamma),$$

што је испуњено на основу претпоставке дате у (4.24). Дакле, на основу неједнакости (4.28), оба низа $\{\hat{\rho}_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\beta}_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ апсолутно и униформно конвергирају на интервалу $(0,1)$.

Доказујемо сада други део теореме, тј. да су суме дате једначинама (4.15) – (4.16) решења МСА система (4.6) – (4.7). Најпре, према претпоставкама теореме и претходно добијеним резултатима, следи да низови $\{|C_k|\}_{k=0}^{\infty}$, $\{|D_k|\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{Q_k\}_{k=0}^{\infty}$ имају коначне суме, што имплицира:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |C_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} |D_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = 0.$$

Даље, означимо са $r_1(x)$ и $r_2(x)$, респективно, полупречнике конвергенције степених редова $R(x, p)$ и $B(x, p)$, дефинисаних једнакостима (4.8). Применом Коши-Хадамарове теореме (видети, рецимо, (Стојановић, В. и сар., 2018), добијамо:

$$r_1(x) = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} |\rho_k(x)|^{1/k} \right)^{-1} \geq \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(|C_k| + \frac{Q_{k-1}}{Me} \right)^{1/k} \right)^{-1} = 1$$

$$r_2(x) = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} |\beta_k(x)|^{1/k} \right)^{-1} \geq \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} (|C_k|M + |D_k| + (1 + e^{-1})Q_{k-1})^{1/k} \right)^{-1} = 1.$$

Према Абеловој теореме (Zakharov, 2001), следи да су функције $R(x, p)$ и $B(x, p)$ непрекидне слева у тачки $p = 1$. Стога, важе једначине (4.15) и (4.16), тј. суме $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j(x)$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(x)$ јесу решења хомотопског система једначина (4.9) – (4.10), када је $p = 1$. Очито, оне су тада и решења еквивалентног, МСА систем (4.6) – (4.7). ■

На крају овог дела, истакнимо да претходна теорема даје само довољне, али не и неопходне услове за конвергенцију НРМ апроксимација (4.23) ка решењу МСА модела. То значи да чак и ако услови у теорему 4.2 не важе, НРМ апроксимације могу конвергирати. Ипак, погодним избором константе $M > 0$, као и почетних вредности C_0, D_0 , ови услови се лако могу испунити. На пример, услов (iii), односно неједнакост (4.24) која обезбеђује стабилност система под ограниченом атрактивношћу, за $M \approx \gamma \rightarrow 0$ постаје $D \geq 0$, тј. увек је испуњена. Слично, када је $C_0 \geq 0$, неједнакост $\alpha(x) \geq 0$ имплицира неједнакост $\exp(\int \alpha(x) dx/x) \geq 1$, одакле се за било које $x \in (0, 1)$ добија:

$$\rho_0(x) \geq \left(C_0 - \gamma \int \frac{dx}{x} \right) = C_0 - \gamma \ln x > 0.$$

Дакле, почетно НРМ решење $\rho_0(x)$ је тада (увек) позитивно. У наставку ће бити приказана формална валидација, као и примена предложеног НРМ поступка у решавању практичних проблема везаних за динамику криминала у Републици Србији.

4.3 ВАЛИДАЦИЈА НРМ ПРОЦЕДУРЕ

У овом делу детаљније испитујемо квалитет НРМ процедуре која је предложена у претходном делу. Примарни циљ јесте провера, тј. верификација (брзе) конвергенције НРМ апроксимација, датих једначинама (4.23), ка правим решења МСА система (4.6) – (4.7). Притом, за било које $k = 0, 1, 2, \dots$, НРМ апроксимације $\{\hat{\rho}_k(x)\}$ и $\{\hat{\beta}_k(x)\}$ трансформацијом $x(t) = \exp(-t)$, при чему је $t \in (0, \infty)$, дају низ (апроксимативних) решења $\hat{c}_k := \hat{\rho}_k(x(t))$ и $\hat{b}_k := \hat{\beta}_k(x(t))$ основног МСА система (4.3) – (4.4). Ради једноставности, најпре претпоставимо да је унутрашњи део криминалне атрактивности МСА система (4.6) – (4.7) нормиран и константан, тј. $\alpha(x) \equiv 1$. Након тога, разматрамо неколико различитих почетних (граничних) услова које могу задовољити решења МСА модела. Сходно томе,

решења једначина (4.11) – (4.12) и (4.17) – (4.18) називамо НРМ-серијама $\{\rho_k(x)\}, \{\beta_k(x)\}$, где је $k = 0, 1, 2, \dots$, а детаљнији опис поступака за њихово израчунавање дат је у наставку.

4.3.1 Серија А

Размотримо најпре проблем добијања НРМ решења $\rho(x)$ и $\beta(x)$ МСА система (4.6) – (4.7) са граничним условима $\rho(1) = \beta(1) = \gamma > 0$. То значи да за основна решења $c(t)$ и $b(t)$ МСА система (4.3) – (4.4) важи да је $c(0) = b(0) = \gamma$, тј. почетне вредности броја почињених кривичних дела, као и динамичка атрактивност криминалних активности, једнаке су (константном) коефицијенту повећања $\gamma > 0$. Као што је већ објашњено у претходном делу, ови гранични услови ће бити испуњени ако НРМ-серије $\{\rho_k(x)\}$ и $\{\beta_k(x)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, задовољавају једнакости $\rho_0(1) = \beta_0(1) = \gamma$ и $\rho_k(1) = \beta_k(1) = 0$, када је $k = 1, 2, \dots$. Да бисмо добили почетна НРМ решења, примењујемо њихов експлицитни облик израчунавања дат једначинама (4.13) – (4.14). На овај начин, након неколико једноставних израчунавања, добија се:

$$\rho_0(x) = \exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) \left(C_0 - \gamma \int \frac{1}{x} \exp\left(-\int \frac{dx}{x}\right) dx\right) = C_0 x + \gamma,$$

где из услова $\rho_0(1) = \gamma$ следи $C_0 = 0$, тј. $\rho_0(x) = \gamma$. Слично, користећи овај резултат, добијамо:

$$\beta_0(x) = x \left(D_0 - \gamma \int \frac{dx}{x^2}\right) = D_0 x + \gamma,$$

па на исти начин као у претходном, следи да је $D_0 = 0$, тј. $\beta_0(x) = \gamma$. Дакле, у овом случају оба почетна НРМ решења $\rho_0(x)$ и $\beta_0(x)$ су константне функције, једнаке параметру $\gamma > 0$.

Даље, користећи рекурентне релације у једначинама (4.19) – (4.20), односно експлицитни облик НРМ-серија, датих једначинама (4.21) – (4.22), функције $\{\rho_k(x)\}$ и $\{\beta_k(x)\}$ се добијају за произвољно $k = 1, 2, \dots$ на следећи начин:

$$\rho_k(x) = x \left(C_k + \int \frac{q_{k-1}(x)}{x^2} dx\right), \quad \beta_k(x) = x \left(D_k - \int \frac{\rho_k(x) + q_{k-1}(x)}{x^2} dx\right).$$

Овде је $q_k(x) := \sum_{j=0}^k \rho_j(x) \beta_{k-j}(x)$, а константе C_k и D_k се лако добијају из горе поменутих граничних услова $\rho_k(1) = \beta_k(1) = 0$. У даљем, наводимо првих неколико чланова НРМ-серије, означених као Серија А:

$$\rho_1(x) = \gamma^2(x - 1), \beta_1(x) = -\gamma^2 x \ln x;$$

$$\rho_2(x) = \gamma^3 x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x - 1 \right), \beta_2(x) = \frac{\gamma^3}{6} x \ln^3 x;$$

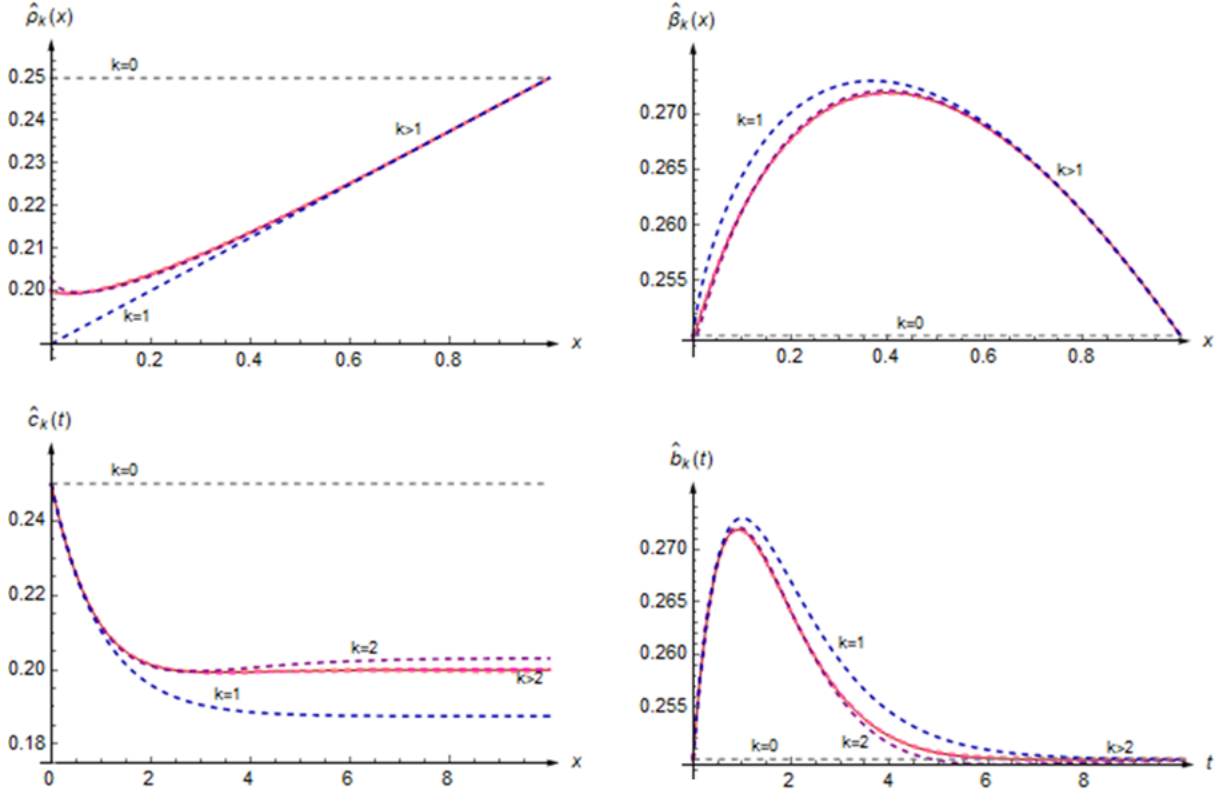
$$\rho_3(x) = \frac{\gamma^4}{24} (24(x^2 - 1) + x \ln^4 x - 4x \ln^3 x + 24x \ln^2 x - 24x(x + 1) \ln x),$$

$$\beta_3(x) = \frac{\gamma^4 x}{120} (-360(x - 1) - \ln^5 x - 20 \ln^3 x - 60 \ln^2 x + 120(2x + 1) \ln x);$$

$$\rho_4(x) = \frac{\gamma^5}{720} (-720(10x^2 - 9x - 1) - x \ln^6 x + 6x \ln^5 x - 90x \ln^4 x + 120x(4x + 1) \ln^3 x - 360x(6x + 1) \ln^2 x + 720x(8x + 3) \ln x),$$

$$\beta_4(x) = \frac{\gamma^5 x}{5040} (191520(x - 1) + \ln^7 x + 84 \ln^5 x + 420 \ln^4 x - 6720x \ln^3 x + 5040(8x - 1) \ln^2 x - 10080(13x + 6) \ln x), \text{ итд.}$$

На основу добијених НРМ серија, једноставно се могу одредити НРМ апроксимације $\{\hat{\rho}_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\beta}_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, као апроксимативна решења МСА система (4.6) – (4.7). Након тога, применом трансформације $x = \exp(-t)$, где је $t \geq 0$, једноставно се добијају апроксимативна решења $\{\hat{c}_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\hat{b}_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ основног МСА система (4.3) – (4.4). Првих неколико НРМ апроксимација $\{\hat{\rho}_k(x)\}$ и $\{\hat{\beta}_k(x)\}$ су приказане на горњим дијаграмима слике 4-2, где се може видети њихова конвергенција ка правом решењу поменутог система. Слично, графикони на доњим дијаграмима слике 4-2 приказују конвергенцију приближних решења $\{\hat{c}_k(t)\}$ и $\{\hat{b}_k(t)\}$ нормализованог МСА система (4.3) – (4.4). Притом, овде је узета вредност $\gamma = 0,25$, одакле се применом једнакости (4.5) добија равнотежна тачки $(b^*, c^*) = (1/4, 1/5)$. На слици 4-2 се такође јасно може уочити конвергенција обеју апроксимација ка овој тачки чиме је, између осталог, потврђена валидност добијених резултата. Најзад, истакнимо да је цео поступак израчунавања НРМ апроксимација $\hat{\rho}_k(x)$ и $\hat{\beta}_k(x)$, као и функција $\hat{c}_k(t)$ и $\hat{b}_k(t)$, када је $k = 0, 1, 2, \dots$, имплементиран у софтверском пакету MATHEMATICA 11.2.



Слика 4-2. Дијаграми изнад: НРМ апроксимације решења МСА система на интервалу $x \in (0,1)$. Дијаграми испод: Апроксимације решења МСА система на интервалу $t \in (0, +\infty)$. (Серија А са вредностима $\alpha(x) = 1$ и $\gamma = 0,25$.) Извор: (Стојичић, С. и сар., 2025)

Штавише, да би се одредио ниво конвергенције овако добијених апроксимација, израчунате су одговарајуће грешке апроксимација, односно следеће три различите мере квалитета добијених оцена:

- (i) *Максималне разлике апроксимација* (енг. *Maximum Aproximation Distance - MAD*):

$$MAD(\hat{\rho}_k) := \|\hat{\rho}_k - \hat{\rho}_{k-1}\| = \max_{0 < x < 1} |\rho_k(x) - \rho_{k-1}(x)|,$$

$$MAD(\hat{\beta}_k) := \|\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_{k-1}\| = \max_{0 < x < 1} |\beta_k(x) - \beta_{k-1}(x)|,$$

представљају мере „блискости“ суседних чланова НРМ серија. Стога, MAD вредности уједно представљају и мере конвергенције НРМ апроксимација у односу на њихов ред апроксимације $k = 0, 1, 2, \dots$

(ii) *Максималне апсолутне грешке* (енг. *Maximum Absolute Error - MAE*):

$$MAE(\hat{\rho}_k) := \max_{0 < x < 1} \left| x \frac{d\hat{\rho}_k(x)}{dx} - \hat{\rho}_k(x) (\alpha(x) + \hat{\beta}_k(x)) + \gamma \right| ,$$

$$MAE(\hat{\beta}_k) := \max_{0 < x < 1} \left| x \frac{d\hat{\beta}_k(x)}{dx} - (\hat{\rho}_k(x) - 1)\hat{\beta}_k(x) + \alpha(x)\hat{\rho}_k(x) \right| ,$$

представљају квантитативне индикаторе грешака НРМ апроксимација у свакој итерацији $k = 0, 1, 2, \dots$. Притом, за тачна решења $\rho(x)$ и $\beta(x)$ МСА система (4.6) – (4.7) важе једнакости $MAE(\rho) = MAE(\beta) = 0$. На овај начин, МАЕ вредности показују ниво одступања НРМ апроксимација од правог решења МСА модела.

(iii) *Максималне фракционе грешке* (енг. *Maximum Fractional Error - MFE*):

$$MFE(\hat{\rho}_k) := \max_{0 < x < 1} \left| \frac{x \frac{d\hat{\rho}_k(x)}{dx} - \hat{\rho}_k(x)(\alpha(x) + \hat{\beta}_k(x)) + \gamma}{\hat{\rho}_k(x)} \right| \times 100\% ,$$

$$MFE(\hat{\beta}_k) := \max_{0 < x < 1} \left| \frac{x \frac{d\hat{\beta}_k(x)}{dx} - (\hat{\rho}_k(x) - 1)\hat{\beta}_k(x) + \alpha(x)\hat{\rho}_k(x)}{\hat{\beta}_k(x)} \right| \times 100\% ,$$

представљају максималне вредности релативних грешака, дефинисаних као однос МАЕ вредности и апсолутних вредности НРМ апроксимација у k -тој итерацији. Све горе поменуте вредности, добијене за обе серије НРМ апроксимација закључно до 7. реда, дате су у табели 4-1.

Табела 4-1. MAD, MAE и MFE вредности НРМ апроксимација (Серија А за $\alpha(x) = 1$ и $\gamma = 0,25$).

Ред (k)	MAD		MAE		MFE(%)	
	($\hat{\rho}_k$)	($\hat{\beta}_k$)	($\hat{\rho}_k$)	($\hat{\beta}_k$)	($\hat{\rho}_k$)	($\hat{\beta}_k$)
1	$6,25 \times 10^{-2}$	$2,30 \times 10^{-2}$	$1,56 \times 10^{-2}$	$1,56 \times 10^{-2}$	8,333	6,249
2	$1,56 \times 10^{-2}$	$3,50 \times 10^{-3}$	$3,91 \times 10^{-3}$	$7,73 \times 10^{-4}$	1,923	1,562
3	$3,91 \times 10^{-3}$	$2,97 \times 10^{-4}$	$9,76 \times 10^{-4}$	$6,13 \times 10^{-6}$	0,1791	0,1381
4	$9,77 \times 10^{-4}$	$2,19 \times 10^{-4}$	$1,40 \times 10^{-4}$	$4,69 \times 10^{-8}$	0,1208	$9,74 \times 10^{-2}$
5	$9,29 \times 10^{-5}$	$4,85 \times 10^{-5}$	$5,11 \times 10^{-5}$	$2,07 \times 10^{-10}$	$5,51 \times 10^{-3}$	$4,21 \times 10^{-3}$
6	$4,93 \times 10^{-5}$	$1,75 \times 10^{-5}$	$5,38 \times 10^{-6}$	$4,54 \times 10^{-11}$	$2,70 \times 10^{-3}$	$2,11 \times 10^{-3}$
7	$1,74 \times 10^{-5}$	$5,96 \times 10^{-6}$	$3,25 \times 10^{-7}$	$1,63 \times 10^{-13}$	$1,64 \times 10^{-4}$	$1,25 \times 10^{-4}$

Као што се лако може видети, код обе серије НРМ апроксимација постоји изражена конвергенција, која је нешто значајније присутна код серије $\{\hat{\beta}_k(x)\}$. Претпостављамо да је то последица ограничених, нултих вредности ових функција на крајевима јединичног интервала $(0,1)$. Насупрот томе, иако су вредности MAD, MAE и MFE нешто веће код НРМ апроксимација $\{\hat{\rho}_k(x)\}$, јасно се види да и оне теже нули и тиме потврђују конвергенцију ове серије ка реалном решењу МСА система (4.6) – (4.7).

4.3.2 Серија В

Слично претходној серији А, овде разматрамо још једну НРМ-серију добијену решавањем МСА система (4.6) – (4.7) и коришћењем предложене НРМ процедуре. Овог пута, за граничне услове, претпостављамо да је $c(0) = 0$ и $b(0) = \gamma$, што представља ситуацију да у почетном тренутку $t = 0$ нема информација о тренутном броју кривичних дела. Тада је $\rho(1) = 0$ и $\beta(1) = \gamma$, па као што је раније објашњено, НРМ-серије $\{\rho_k(x)\}$ и $\{\beta_k(x)\}$ задовољавају једнакости $\rho_0(1) = 0$, $\beta_0(1) = \gamma$ и $\rho_k(1) = \beta_k(1) = 0$, за произвољно $k = 1, 2, \dots$ Слично као раније, коришћењем једначина (4.13) – (4.14) добијају се најпре вредности константи $C_0 = -\gamma$ и $D_0 = 0$, односно почетна НРМ решења:

$$\rho_0(x) = \gamma(1 - x), \quad \beta_0(x) = \gamma(x \ln x + 1).$$

Настављајући овај поступак, односно применом једначина (4.21) – (4.22), када је $k = 1, 2, \dots$, лако се добијају остали чланови НРМ-серије $\{\rho_k(x)\}$ и $\{\beta_k(x)\}$, од којих првих неколико гласе:

$$\rho_1(x) = \frac{\gamma^2}{2}(x \ln^2 x - 2(x + 1)x \ln x + 2x^2 - 2),$$

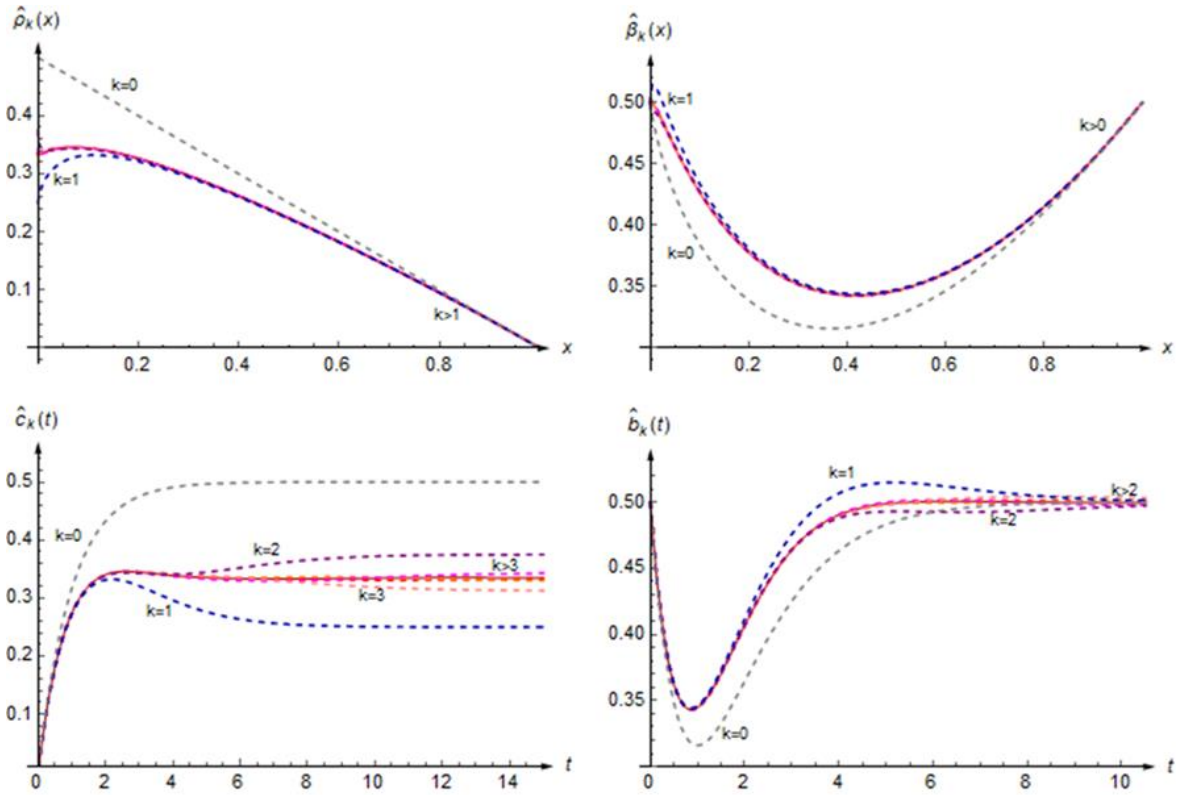
$$\beta_1(x) = \frac{\gamma^2 x}{6}(6(2x + 1) \ln x - \ln^3 x - 18(x - 1));$$

$$\rho_2(x) = \frac{\gamma^3}{24}(12(3x^3 - 22x^2 + 17x + 2) + 72x(2x + 1) \ln x - 12x(x^2 + 6x + 1) \ln^2 x + 4x(4x + 1) \ln^3 x - x \ln^4 x),$$

$$\beta_2(x) = \frac{\gamma^3 x}{120}(-15(x - 1)(17x - 287) + \ln^5 x - 160x \ln^3 x + 30(x(3x + 32) - 4) \ln^2 x - 30(x(x + 88) + 46)x);$$

$$\rho_3(x) = \frac{\gamma^4}{720} (90x(22x^3 + 57x^2 - 384x - 243) \ln x - 180x(3x^3 + 5x - 94x + 17) \ln^2 x - 60x(2x + 15x^2 + 56x + 6) \ln^3 x + 60x(5x^2 + 12x + 1) \ln^4 x - 6x(16x + 1) \ln^5 x + x \ln^6 x - 30(29x^4 + 513x^3 - 2733x^2 + 2167x + 24)),$$

$$\beta_3(x) = \frac{\gamma^4 x}{45360} (70(1270x^3 + 21627x^2 - 253206x + 230309) - 420(410x^3 + 1053x^2 - 22788x - 13032) \ln x + 315(136x^3 + 45x^2 - 11664x + 2799) \ln^2 x + 630(16x^3 + 165x^2 + 1152x + 138) \ln^3 x - 1890(15x^2 + 64x - 1) \ln^4 x + 378(32x - 1) \ln^5 x - 9 \ln^7 x), \quad \text{итд.}$$



Слика 4-3. Дијаграми изнад: НРМ апроксимације решења МСА система на интервалу $x \in (0,1)$. Дијаграми испод: Апроксимације решења МСА система на интервалу $t \in (0, +\infty)$. (Серија В са вредностима $\alpha(x) = 0$ и $\gamma = 0,25$.) Извор: (Стојичић, С. и сар., 2025)

Као илустрација, на горњим дијаграмима слике 4-3 приказани су графикони НРМ апроксимација $\{\hat{\rho}_k(x)\}$ и $\{\hat{\beta}_k(x)\}$, док доњи панели исте слике приказују одговарајуће апроксимације $\{\hat{c}_k(t)\}$ и $\{\hat{b}_k(t)\}$ нормализованог МСА система (4.3) – (4.4), добијеног

применом трансформације $x = \exp(-t)$, када је $t \geq 0$ и $\gamma = 0,5$. Као што се лако може видети, а слично као у случају Серије А, и овде постоји изразита конвергенција добијених приближних решења ка тачном решењу МСА модела. Такође, у граничном случају, када $t \rightarrow +\infty$, очигледна је конвергенција НРМ апроксимација $\{\hat{b}_k(t)\}$ и $\{\hat{c}_k(t)\}$ ка равнотежној тачки МСА система $(b^*, c^*) = (1/2, 1/3)$.

Табела 4-2. MAD, MAE и MFE вредности НРМ апроксимација (Серија В за $\alpha(x) = 1$ и $\gamma = 0,5$).

Ред (k)	MAD		MAE		MFE(%)	
	$(\hat{\rho}_k)$	$(\hat{\beta}_k)$	$(\hat{\rho}_k)$	$(\hat{\beta}_k)$	$(\hat{\rho}_k)$	$(\hat{\beta}_k)$
1	0,2500	$5,07 \times 10^{-2}$	0,1250	0,1248	1,919	2,499
2	0,1250	$2,19 \times 10^{-2}$	$6,25 \times 10^{-2}$	$3,33 \times 10^{-3}$	1,788	0,7933
3	$6,25 \times 10^{-2}$	$1,09 \times 10^{-2}$	$3,12 \times 10^{-3}$	$3,03 \times 10^{-4}$	0,9737	$5,92 \times 10^{-2}$
4	$3,12 \times 10^{-2}$	$5,80 \times 10^{-3}$	$1,02 \times 10^{-4}$	$4,03 \times 10^{-5}$	$4,17 \times 10^{-2}$	$7,20 \times 10^{-3}$
5	$6,20 \times 10^{-3}$	$1,97 \times 10^{-3}$	$4,82 \times 10^{-5}$	$1,11 \times 10^{-6}$	$4,02 \times 10^{-3}$	$1,80 \times 10^{-4}$
6	$5,10 \times 10^{-3}$	$1,56 \times 10^{-3}$	$2,37 \times 10^{-7}$	$5,28 \times 10^{-8}$	$6,33 \times 10^{-4}$	$6,40 \times 10^{-5}$
7	$5,92 \times 10^{-4}$	$2,45 \times 10^{-4}$	$1,92 \times 10^{-9}$	$8,07 \times 10^{-10}$	$7,12 \times 10^{-5}$	$1,80 \times 10^{-6}$

Потврда горе наведених чињеница, као и степен конвергенција добијених НРМ апроксимација могу се такође видети и у табели 4-2, где су приказане одговарајуће MAD, MAE и MFE вредности, дефинисане на исти начин као и раније. И у овом случају, слично као код Серије А, јасно је видљиво смањење ових вредности и њихова конвергенција ка нули. Штавише, приметно је да, на исти начин као у претходном случају, серија $\{\hat{\beta}_k(x)\}$ има нешто бржу конвергенцију од $\{\hat{\rho}_k(x)\}$. Ипак, код обе ове серије је очигледна конвергенција ка тачном решењу МСА система, чиме је оправдана примена предложене НРМ процедуре у (приближном) решавању МСА модела.

4.3.3 Серија С

На крају овог дела, размотримо проблем проналажења (граничног) решења МСА система (4.6) – (4.7), када је $\alpha(x) = a > 0$ и важе почетни услови $\rho'(1) = \beta'(1) = 0$. То значи да обе функције $\rho(x)$ и $\beta(x)$ имају константне (тангенцијалне) вредности у граничној тачки $x = 1$. Стога, решења $c(t)$ и $b(t)$ основног МСА система (4.3) – (4.4) задовољавају

једнакости $c'(0) = b'(0) = 0$, што одговара ситуацији када у почетном временском тренутку ($t = 0$) нема промена у броју починиоца КД, нити у динамици атрактивности криминала. Према адитивности извода, ово имплицира да за обе НРМ серије $\{\rho_k(x)\}$ и $\{\beta_k(x)\}$ важе једнакости $\rho'_k(1) = \beta'_k(1) = 0$, за свако $k = 0, 1, 2, \dots$. Користећи дате граничне услове и једначине (4.13) – (4.14), као почетно НРМ решење се добијају константне функције $\rho_0(x) = \gamma/a$ и $\beta_0(x) = \gamma$. Након тога, поновном применом једначина (4.22) – (4.23) и индуктивне методе, лако се добијају остали чланови НРМ серија на следећи начин:

$$\rho_k(x) = (-1)^k \left(\frac{\gamma}{a}\right)^{k+1}, \quad \beta_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Најзад, (тачно) константно решење МСА система (4.6) – (4.7), а самим тим и нормализованог МСА система (4.3) – (4.4), дато је једнакостима:

$$\rho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\gamma}{a}\right)^{k+1} = \frac{\gamma}{a + \gamma}, \quad \beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(x) = \gamma. \quad (4.31)$$

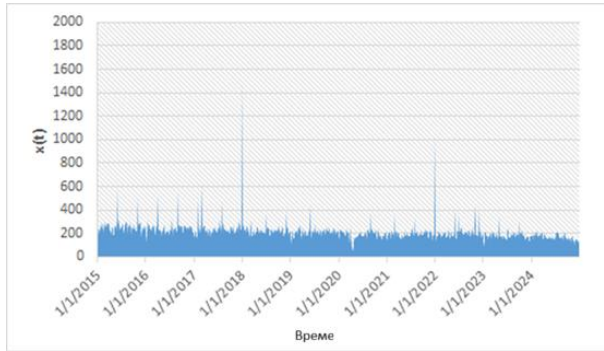
Очито, једначине (4.31) представљају равнотежну тачку (b^*, c^*) МСА модела, која је већ раније дефинисана једнакошћу (4.5). Оаквво, константно решење МСА система очито одговара најједноставнијем (тривијалном) случају, када не постоји никаква промена у броју починиоца КД, као ни у динамици атрактивности криминалних активности.

4.4 ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА МОДЕЛА

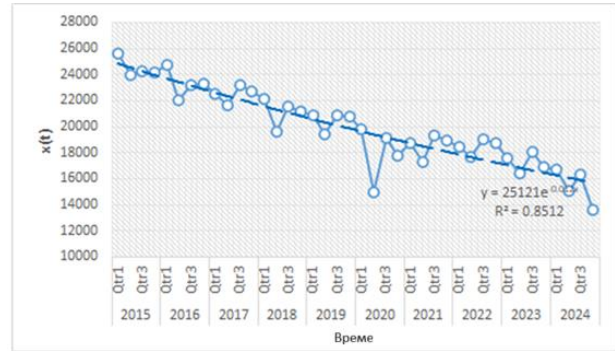
Разматримо сада практичну примену предложене НРМ технике у моделовању реалних података о криминалним активностима. У ту сврху, како је већ раније речено, коришћени су деперсонализовани подаци о евидентираним кривичним делима на територији Републике Србије у претходних 10 година. Прецизније, посматрани скуп података је најпре опсервиран на дневном нивоу и садржи, између осталог, датуме, места и број кривичних дела почињених од 1. јануара 2015. до 31. децембра 2024. године, што је узето као основна временска серија.

Треба напоменути да су подаци прикупљени према званичним извештајима Министарства унутрашњих послова Републике Србије, на дневном нивоу. Као илустрација,

слика 4-4(а) приказује динамику дневног броја КД забележених у овом временском периоду, где су приметне наглашене флукуације. Да би се боље описала детерминистичка функционална зависност ових података у МСА моделу (4.3) – (4.4), они су прегруписани и квартално, као што се може видети на слици 4-4 (б). На овај начин, јасно је видљив тренд смањења стопе криминала током посматраног временског периода. Може се показати да овај пад има експоненцијални тренд, такође приказан на слици 4-4 (б), заједно са одговарајућим коефицијентом детерминације (R^2). Ово, између осталог, указује на могућност моделовања ових података коришћењем претходно описаног МСА модела и НРМ процедуре.



(а)



(б)

Слика 4-4. Временске серије броја кривичних дела извршених у Републици Србији, посматране на дневном нивоу (а) и квартално (б). Извор: (Стојичић, С. и сар., 2025)

У следећем кораку, опсервиран низ података, означен као $\{x(t)\}$, узет је у процентуалном облику и додатно нормализован у односу на максималну вредност, применом једнакости:

$$c(t) := \frac{x(t)}{\max\{x(t)\}}. \quad (4.32)$$

Са аспекта форензичког приступа анализи учесталости посматраних догађаја, формирање ове серије има знатно шире значење од чисто математичке нормализације, јер се на тај начин апсолутна учесталост посматраних кривичних дела трансформише у релевантни индикатор оперативног оптерећења и приоритета према којима може бити планирано између осталог ангажовање форензичких ресурса. Како апсолутне учесталости зависе од обима посматраног узорка, као и других карактеристика, непосредно поређење различитих

временских серија може бити методолошки ограничено. Из тог разлога се уводи нормализована серија, чиме се све вредности пресликавају на интервал $[0,1]$, при чему вредност $c(t) = 1$ одговара временском интервалу са највећом забележеном заступљеношћу посматраног догађаја.

Нормализацијом се такође елиминише утицај апсолутног броја регистрованих догађаја, чиме анализа постаје усмерена на идентификовање образаца промена интензитета КД. Такав приступ, који ће бити коришћен и касније, код стохастичких модела динамике криминала, омогућава поређење различитих категорија кривичних дела. На овај начин је добијена прва временска серија $\{c(t)\}$, за коју је, због тенденције смањења вредности серије $\{x(t)\}$, почетна вредност једнака $c(0) = 1$. Ово омогућава да се она посматра као могућа реализација, са одређеним случајним флуктуацијама, детерминистичке функције $c(t)$ која представља решење нормализованог МСА система (4.6) – (4.7).

Да би се добила друга серија $\{b(t)\}$, унутар сваког квартала, посматране су највеће и најниже месечне вредности, означене са $x_{max}(t)$ и $x_{min}(t)$, респективно. Након тога, дефинишу се вредности $\tilde{b}(t)$ као аритметичке средине ових екстрема, тј.

$$\tilde{b}(t) := \frac{x_{max}(t) + x_{min}(t)}{2}. \quad (4.33)$$

Увођењем ових вредности, претпоставља се да квартали са вишим вредностима $\tilde{b}(t)$ имају већу атрактивност за извршење кривичних дела, без обзира на посматрани временски период. На овај начин, претпоставља се да низ $\tilde{b}(t)$ представља динамичку атрактивност криминала у сваком од посматраних (кварталних) временских периода.

Након тога, одговарајуће вредности $b(t)$ се израчунавају на сличан начин као за претходни низ $\{c(t)\}$, тј. применом једнакости:

$$b(t) := \frac{\tilde{b}(t)}{\max\{\tilde{b}(t)\}} + \delta. \quad (4.34)$$

Приметимо да је, поред нормализације у односу на највећу вредност низа $\tilde{b}(t)$, овде уведена адитивна константа $\delta > 0$, како би се осигурали почетни услови $b(0) = c(0) = \gamma$. У нашем случају, узета је вредност $\delta = 0,4$, што имплицира једнакост $b(0) = 1.00348 \approx 1$. Стога се у поступку фитовања реалних података може претпоставити да је $\alpha(x) = \gamma = 1$, односно

може се применити НРМ поступак идентичан оном приказаном за Серију А у претходном одељку.

Прецизније речено, коришћењем НРМ апроксимација $\{\hat{\rho}_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\beta}_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, дефинисаних једначинама (4.23), као и трансформације $x(t) = \exp(-t)$, оцене решења МСА система (4.3) – (4.4) могу се добити на следећи начин:

$$\hat{c}_k(t) := \sum_{j=0}^k c_j(t), \quad \hat{b}_k(t) := \sum_{j=0}^k b_j(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.34)$$

Овде је $c_j(t) := \rho_j(\exp(-t))$ и $b_j(t) := \beta_j(\exp(-t))$, за свако $j = 0, 1, \dots, k$, при чему су $\{\rho_j(x)\}$ и $\{\beta_j(x)\}$ НРМ серије дефинисане једначинама (4.13) – (4.14) и (4.21) – (4.22). Поред тога, за тако добијене НРМ апроксимације $\{\hat{c}_k(t)\}$ и $\{\hat{b}_k(x)\}$, дефинисане су следеће грешке оцене:

- (i) *Квадратне грешке оцене* (енг. *Mean Squared Estimation Errors - MSEE*) представљају просеке квадратних одступања процењених и стварних вредности дате серије:

$$MSEE(\hat{c}_k) := \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (c(t) - \hat{c}_k(t))^2, \quad MSEE(\hat{b}_k) := \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (b(t) - \hat{b}_k(t))^2.$$

- (ii) *Фракционе грешке оцене* (енг. *Fractional estimation errors - FEE*) представљају просеке квадрата односа горе дефинисаних одступања и стварних вредности серија:

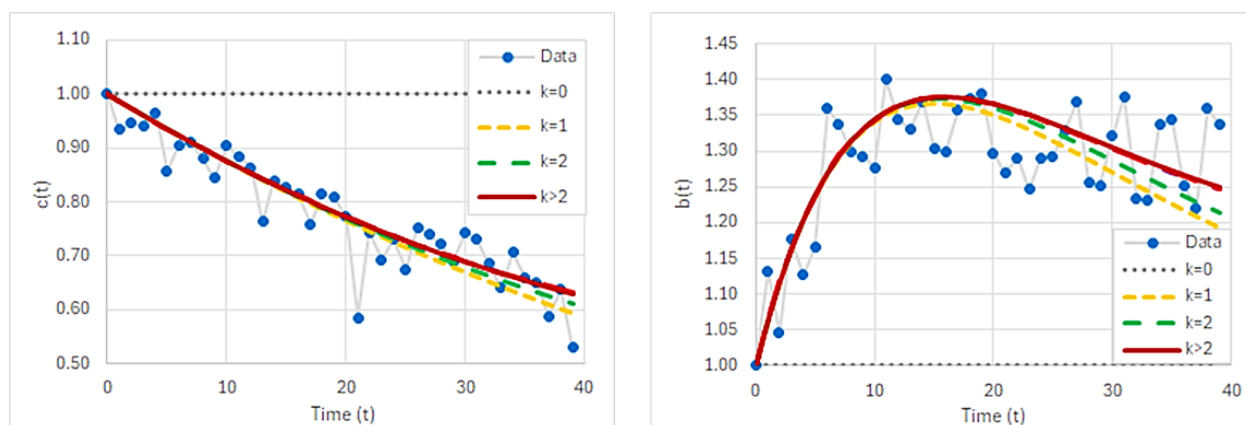
$$FEE(\hat{c}_k) := \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{c(t) - \hat{c}_k(t)}{c(t)} \right)^2 \times 100\%, \quad FEE(\hat{b}_k) := \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{b(t) - \hat{b}_k(t)}{b(t)} \right)^2 \times 100\%.$$

У табели 4-3 приказано је првих неколико MSEE и FEE вредности НРМ апроксимација $\{\hat{c}_k(t)\}$ и $\{\hat{b}_k(t)\}$, добијених према горе поменутим формулама, при чему је дужина посматраног временског низа $T = 40$. Овако добијене вредности јасно указују на квалитет апроксимација, јер је приметно опадање MSEE и FEE вредности са повећањем реда апроксимације $k = 0, 1, 2, \dots$

Табела 4-3. Вредности грешака *HPM* апроксимација $\hat{c}_k(t)$ и $\hat{b}_k(t)$ када је $k = 0,1,2,3,4,5$.

Ред (k)	MSEE		FEE(%)	
	$\hat{c}_k(t)$	$\hat{b}_k(t)$	$\hat{c}_k(t)$	$\hat{b}_k(t)$
0	0,0620	0,0875	13,904	5,0293
1	$2,15 \times 10^{-3}$	$4,15 \times 10^{-3}$	0,5158	0,2468
2	$2,13 \times 10^{-3}$	$3,79 \times 10^{-3}$	0,5124	0,2290
3	$2,12 \times 10^{-3}$	$3,47 \times 10^{-3}$	0,5088	0,2151
4	$2,11 \times 10^{-3}$	$3,46 \times 10^{-3}$	0,4792	0,2146
5	$2,08 \times 10^{-3}$	$3,45 \times 10^{-3}$	0,4785	0,2141

Поред тога, као што се лако може видети на слици 4-5, задовољавајуће оцене низова $c(t)$ и $b(t)$ су добијене већ за апроксимације реда $k > 2$. Истовремено, треба напоменути да су $c(t)$ и $b(t)$ временске серије које такође имају одређене стохастичке компоненте. Из тих разлога, постоје одступања од апроксимационих функција $\hat{c}_k(t)$ и $\hat{b}_k(t)$, које описују детерминистичку компоненту посматраних временских серија. Ипак, резултат овако предложеног поступка апроксимације представља основу за даљу анализу и могућности моделовања динамике криминала.



Слика 4-5. Апроксимације серија $c(t)$ и $b(t)$ коришћењем предложене *HPM* процедуре. Извор: (Стојичић, С. и сар., 2025).

5. СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ ДИНАМИКЕ КРИМИНАЛА

Поред горе наведених модела детерминистичког типа, у овом поглављу дисертације се разматрају различите стохастичке карактеристике посматраних података о евидентираним криминалним догађајима. Због добро познате сложености динамике појаве различитих облика криминала, најпре ће бити истражена могућност њиховог моделовања нелинеарним стохастичко-динамичким моделима. То се, пре свега, односи на могућност креирања оригиналне модификације неких од тзв. *уопштених STOPBREAK процеса* (енг. *Generalized STOPBREAK – GSB processes*), као стохастичких модела који би се могли практично применити у описивању динамике наведених кривичних дела. Изворни облик STOPBREAK процеса уведен је у фундаменталном раду Роберта Енга¹⁶ и Арона Смита (Engle & Smith, 1999). Затим је неколико његових оригиналних модификација, под називом *уопштени STOPBREAK (GSB) процеси*, описана у (Стојановић, В. и сар., 2014; Стојановић, В. и сар., 2015; Стојановић, В. и сар., 2016). Касније су различите модификације GSB процеса разматране у чланцима радовима већег броја аутора (Љајко, Е. и сар., 2023; Стојановић, В. и сар., 2023; Јовановић, М. и сар., 2022).

У овом истраживању се полази од претпоставке је да би се увођењем новог, вишедимензионалног облика GSB процеса добио адекватан стохастички модел који би успешно описао динамику специфичних, али и општих, облика криминалитета у Републици Србији. Добијени стохастички модел, назван *дводимензионални (2D) GSB процес* је примењен за анализу великих скупова података, у којима је тешко на други начин доћи до информација и закључака, који упућују на обрасце и динамику наведених облика криминалитета, а посебно оних које су значајни за форензичке анализе. Додатно, овакав дводимензионални модел се може укључити у развој решења за израду планова и операционализацију превентивног деловања у одређеним областима криминогених понашања. На тај начин, добијени резултати могу представљати један од битних метода у процесу доношења одлука у току организације рада организационих јединица које се баве

¹⁶ Роберт Фрај Енгл III (рођен 10. новембра 1942) је амерички економиста и статистичар. Добитник је Нобелове награде за економске науке 2003. године, коју је поделио са Клајвом Грејнцером, за увођење оригиналних модела економских временских серија са временски променљивом волатилношћу (енг. Autoregressive Conditional Heteroscedastic - ARCH models).

применом форензичких метода, а нарочито ангажовању, припреми и потребама одређених техничко-технолошких средстава потребних за откривање и форензичку анализу тих кривичних дела.

У наредном делу је дефинисан нови облик *пропорционалног ауторегресивног (PAR) модела*, који може описати учешћа различитих специфичних облика криминалитета у односу на општу стопу динамике криминала у Републици Србији. Као што је већ раније истакнуто, PAR модели описују тзв. *пропорционалне податке*, који се типично моделују јединичним расподелама вероватноћа. Први облик PAR модела предложен је у рукопису (McKenzie, 1985), а до данас постоји тек неколико PAR процеса, који углавном користе одговарајуће ауторегресивне једначине са бета дистрибуираним случајним коефицијентима (Bayer, Cintra, & Cribari-Neto, 2018; Aknouche & Dimitrakopoulos, 2023), односно са тзв. симплекс расподелом (Zhang, Qiu, & Shi, 2016).

Полазећи од претпоставке да се динамички однос различитих, специфичних облика криминалитета у односу на општу стопу криминалних активности може управо описати јединичним расподелама, овде ће бити истражена могућност формирања новог, тзв. QHU-PAR модела, који је заснован на иновацијама са тзв. јединичном квази-Линдлијевом полулогистичком (енг. *Quasi-Lindley Half-Logistic Unit – QHU*) расподелом, недавно предложеној у раду (Стојановић, В.С. и сар., 2025b). Треба истаћи да у досадашњим истраживањима PAR модели нису коришћени у моделовању криминалних активности, па на тај начин приказани модел представља нов и оригиналан допринос анализе криминалитета, што несумњиво представља један од важних научних доприноса ове дисертације.

Претпоставке новог модела су такође поткрепљене анализом просторно-временских података о криминалним активностима, односно кривичним делима угрожавања сигурности чије расветљавање захтева значајну подршку са форензичког аспекта. Из тих разлога, сматра се да овако добијени резултати могу имати значајан допринос у анализи, планирању и организацији рада форензичких стручних служби. Тиме се такође омогућава истраживање структурних односа између различитих категорија криминалних активности, а не њихових апсолутних учесталости у посматраном узорку.

5.1 2D-GSB ПРОЦЕС

Познато је да се многи феномени из стварног света често манифестују у неколико зависних временских серија које делују заједно. У криминолошком контексту, на пример, серије које квантификују крађе и тешке крађе (организоване или насилне) су често у корелацији. Заједнички друштвени фактори (економска криза, промена у полицијској стратегији, сезоналност) могу истовремено изазвати скокове у обе серије, док свака од њих појединачно задржава своју динамику и унутрашња структурна својства. У том смислу, неки конвенционални модели (нпр. VAR, GARCH) често не обухватају истовремене прекиде и латентну међузависност, док једнодимензионални GSB модел не може експлицитно моделирати истовремену корелацију у две серије.

У циљу решавања оваквих феномена, овде је предложен *дводимензионални генерализовани (или Гаусов) Split-BREAK (2D-GSB) модел* који уводи пар латентних (скривених) процеса синхронизованих заједничким, тзв. *Бернулијевим индикатором шума*, са дводимензионалним, корелисаним иновацијама. Треба напоменути да се у постојећој литератури термин „генерализовано“ односи на конструкцију хибридног приступа представљеног у (Стојановић, В. и сар., 2015), која генерализује основни STOPBREAK модел представљен у (Engle & Smith, 1999). Сходно томе, експлицитно је претпостављено да је расподела иновација Гаусова. У горе поменутим радовима, утврђена су дистрибутивна и асимптотска својства GSB процеса, заједно са различитим методама оцене параметара. Поред тога, главне дистрибутивне карактеристике и поступци оцене засноване на емпиријским карактеристичним функцијама (ECF) детаљно су размотрени у (Стојановић, В. и сар., 2016), док су модификације које укључују Лапласове и Кошијеве иновације представљене у (Стојановић, В. и сар., 2023) и (Љајко, Е. и сар., 2023), респективно.

Као што је већ поменуто, *(2D-GSB) процес* представља проширење једнодимензионалног (униваријантног) GSB модела, где се два међусобно повезане временске серије развијају под динамиком промене режима вођеном наглашеним иновацијама (шумовима). Додатно, претпоставља се да су индикатори режима синхронизовани у обе серије, па на тај начин њихова корелациона структура и заједничка динамика постају посебно богате и релевантне за моделовање система из стварног света, где се јављају тзв. „паралелни поремећаји“. На овај начин је могуће моделовати уобичајене

режиме прекида, међусобну (интер)корелацију, као и појединачне структуре аутокорелације латентних и посматраних серија.

Са практичне перспективе, GSB процес, описан у Одељку 2.4, примењен је на различите емпиријске контексте, укључујући процесе везане за берзу на примеру Београдске берзе и динамику заражених и вакцинисаних особа током пандемије COVID-19. Ове примене истичу шири практични потенцијал GSB модела у економској и друштвеној динамици. Ипак, једнодимензионални GSB модел узима у обзир понашање режима вођено прагом само унутар једне серије, тако да не може експлицитно описати синхронизоване корелационе структуре у више временских серија. Кључна структурна карактеристика предложеног 2D-GSB оквира јесте употреба једног синхронизованог Бернулијевог индикатора $q_t(c)$, одређеног величином заједничког вектора иновација, чија је формална дефиниција дата у следећем одељку. Ова структурна модификација представља суштинско проширење униваријантног GSB модела и омогућава обема компонентама процеса да истовремено уђу или изађу из режима, одражавајући ситуације у којима су повезане временске серије (нпр. различите, али потенцијално повезане врсте криминала) под утицајем заједничких спољних фактора (нпр. промена политике, економска криза). На тај начин, модел региструје координисане нагле промене на транспарентан и аналитички разумљив начин, чиме се проширује претходна униваријантна GSB структура на мултиваријантно окружење.

Штавише, за разлику од стандардних мултиваријантних модела, предложени 2D-GSB модел укључује заједнички индикатор режима вођен прагом, одређен на основу величине мултиваријантних иновација. Ова карактеристика омогућава моделу да обухвати синхронизоване структурне промене унутар јединственог латентног оквира, уместо да се ослања искључиво на линеарну зависност или динамику засновану на волатилности, типичне за неке конвенционалне мултиваријантне спецификације. У наредном делу дата је дефиниција и основна стохастичка структура 2D-GSB процеса, а након тога се разматрају основне стохастичке карактеристике овог модела, првенствено везане за расподелу његових компоненти и њихових асимптотских особина. Након тога су разматране неке процедуре за оцењивање непознатих параметара 2D-GSB процеса, као и асимптотска својства тако добијених оцена. На крају су спроведене Монте Карло симулације добијених оцена, као и примена 2D-GSB процеса у анализи динамике одређених, конкретних КД.

5.1.1 Дефиниција и структура 2D-GSB процеса

Као што је већ горе поменуто, дводимензионални генерализовани (или Гаусов) Split-BREAK (2D-GSB) процес проширује једносимензионални GSB модел тако што се две међусобно повезане временске серије посматрају унутар заједничких промене режима вођених наглашеним флуктуацијама обеју серија. Притом су индикатори режима синхронизовани у обе серије, тако да могу да адекватно опишу динамику реалних појава и система које карактеришу истовремене, нагле и перманентне промене.

У овом делу, дајемо најпре основне појмове, као и дефиницију 2D-GSB процеса. Нека је $\mathbf{Y}_t = (Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)})^\top$ биваријантна (дводимензионална) временска серија дефинисана у дискретном времену $t \in \mathbb{N}_0$. Кажемо да процес $(\mathbf{Y}_t)$ еволуира према 2D-GSB структури ако важи следећа једнакост:

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_t^{(1)} \\ Y_t^{(2)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (5.1)$$

Овде су $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t^{(1)}, \varepsilon_t^{(2)})^\top \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ независне идентично расподељене (енг. *Independent Identical Distributed - IID*) иновације, тј. бели шум са биваријантном (дводимензионалном) Гаусовом расподелом са нултом средњом вредношћу и коваријационом матрицом:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

где су $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ стандардне девијације серија $(\varepsilon_t^{(1)})$, $(\varepsilon_t^{(2)})$, респективно, док је $|\rho| < 1$ њихова корелација. Такође, претпостављамо да су иновације $(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$ дефинисане на истом простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, проширеном неком филтрацијом¹⁷ $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$, тако да су очекивана средња вредност и коваријациона матрица серије $(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$ дате са:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = (0, 0)^\top, \quad Var(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \Sigma. \quad (5.2)$$

Даље, $\boldsymbol{\mu}_t = (\mu_t^{(1)}, \mu_t^{(2)})^\top$ је латентни (скривени) векторски процес, назван *мартингани процес средњих вредности*, дефинисан рекурентном релацијом:

¹⁷ Ако је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа, филтрација $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$ јесте проширење овог простора, тако да важи $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1} \subseteq \mathcal{F}$, за свако $t \in \mathbb{N}_0$. Филтрација $\mathcal{F}$ представља скуп информација доступних до тренутка t .

$$\mu_t^{(i)} = \mu_{t-1}^{(i)} + q_{t-1} \varepsilon_{t-1}^{(i)} = \mu_0^{(i)} + \sum_{j=0}^{t-1} q_j \varepsilon_j^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (5.3)$$

Овде је $\mu_0^{(i)} = m_i$ (const.), док је (q_t) тзв. *индикатор шума*, тј. Бернулијев процес дефинисан једначинама:

$$q_t(c) = I\{\|\varepsilon_{t-1}\|^2 > c\} = \begin{cases} 1, & (\varepsilon_{t-1}^{(1)})^2 + (\varepsilon_{t-1}^{(2)})^2 > c, \\ 0, & (\varepsilon_{t-1}^{(1)})^2 + (\varepsilon_{t-1}^{(2)})^2 \leq c, \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

где је $\|\cdot\|$ уобичајена еуклидска норма у $\mathbb{R}^2$ и $q_0(c) = 1$.

Вредност $c > 0$ представља *критичну вредности реакције*, тј. величину претходних иновација (ε_t) које одређују да ли је тренутна иновација укључена у латентни процес (μ_t) , дат једначином (5.3). Прецизније, када је $q_{t-1} = 0$, онда нема промене у вредностима $\mu_t^{(i)}, i = 1, 2$, у поређењу са претходним вредностима $\mu_{t-1}^{(i)}$. На основу једнакости (5.1), то имплицира да ће вредности $Y_t^{(i)}$ бити са „малом“ флукуацијом, која зависи само од $\varepsilon_t^{(i)}$. Супротно томе, у случају када је $q_{t-1} = 1$, процес пролази кроз изражену (трајну) промену, што резултира значајном флукуацијом у вредностима $Y_t^{(i)}$.

На тај начин, промену режима у 2D-GSB процесу покрећу прагови иновација, односно тренутне реализације иновација (ε_t) које одређују интензитет флукуација основне серије (Y_t) . Такође, треба напоменути да синхронизовани индикатор $q_t(c)$, дефинисан једнакошћу (5.4), омогућава заједничко откривање режима у обе компоненте (ε_t) , обухватајући структурно повезане скокове („шокове“) у оба његова корелисана иновациона процеса $(\varepsilon_t^{(i)})$, $i = 1, 2$. Ово својство је посебно важно приликом моделовања међусобно зависних временских серија, као што су различити, али повезани облици криминала, о чему ће бити речи у наставку. То такође омогућава кохерентно тумачење латентне динамике, као и боље тумачење уобичајених спољних шокова и утицаја. Слично као у једнодимензионалном случају (Јовановић, М. и сар., 2022), могу се доказати следећа својства горе поменутих временских серија:

Теорема 5.1 (Стојичић, С. и сар., 2026). Нека су (μ_t) и (Y_t) дводимензионални стохастички процеси дефинисани једнакостима (5.1) – (5.4). Тада оба ова низа имају константну и једнаку очекивану средњу вредност:

$$E(\mu_t) = E(Y_t) = (m_1, m_2)^T,$$

док су њихове коваријационе матрице, редом,

$$\Gamma_\mu(s, t) = \text{Cov}(\mu_s, \mu_t) = \begin{cases} p_c \cdot t \cdot \Sigma, & s = t \\ p_c \cdot \min(s, t) \cdot \Sigma, & s \neq t \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\Gamma_Y(s, t) = \text{Cov}(Y_s, Y_t) = \begin{cases} (1 + p_c t) \cdot \Sigma, & s = t \\ p_c \cdot (1 + \min(s, t)) \cdot \Sigma, & s \neq t \end{cases} \quad (5.6)$$

где је $p_c = E(q_t) = P\{\|\varepsilon_t\|^2 > c\}$.

Доказ. Полазимо најпре од чињенице да су $(q_i, \varepsilon_i^{(i)})$, $i = 1, 2$ некорелисани низови случајних променљивих, за које важи:

$$\begin{aligned} E(q_t \varepsilon_t^{(i)}) &= E(q_t) E(\varepsilon_t^{(i)}) = 0, \\ \text{Var}(q_t \varepsilon_t^{(i)}) &= E(q_t^2 (\varepsilon_t^{(i)})^2) = E(q_t) \cdot \text{Var}(\varepsilon_t^{(i)}) = p_c \sigma_i^2. \end{aligned}$$

Тада, према једнакости (5.3), следи:

$$E(\mu_t^{(i)}) = E(\mu_0^{(i)}) + \sum_{j=0}^{t-1} E(q_j \varepsilon_j^{(i)}) = m_i, \quad i = 1, 2,$$

док се за варијансе серија $(\mu_t^{(i)})$ добија:

$$\text{Var}(\mu_t^{(i)}) = \text{Var}(\mu_0^{(i)}) + \sum_{j=0}^{t-1} \text{Var}(q_{j-1} \varepsilon_{j-1}^{(i)}) = p_c \cdot t \cdot \sigma_i^2, \quad t \geq 0. \quad (5.7)$$

Слично, унакрсна коваријанса између ових случајних променљивих се може израчунати на следећи начин:

$$\text{Cov}(\mu_t^{(1)}, \mu_t^{(2)}) = E\left(m_1 + \sum_{i=0}^{t-1} q_i \varepsilon_i^{(1)}\right) \left(m_2 + \sum_{i=0}^{t-1} q_i \varepsilon_i^{(2)}\right) - m_1 m_2 \quad (5.8)$$

$$= \sum_{j=0}^{t-1} E\left(q_j^2 \varepsilon_j^{(1)} \varepsilon_j^{(2)}\right) = p_c \cdot t \cdot \rho \cdot \sigma_1 \sigma_2,$$

тако да једнакости (5.7) и (5.8) потврђују прву једнакост у (5.5).

Коваријанса вектора μ_s, μ_t када је $s \neq t$, може се добити на сличан начин. Најпре, коришћењем једначина (5.3) и (5.7), за свако $t > s > 0$, добија се:

$$\begin{aligned} Cov(\mu_s^{(i)}, \mu_t^{(i)}) &= E(\mu_s^{(i)} \mu_t^{(i)}) - m_i^2 = E\left[\mu_s^{(i)} \left(\mu_s^{(i)} + \sum_{k=s}^{t-1} q_k \varepsilon_k^{(i)}\right)\right] - m_i^2 = Var(\mu_s^{(i)}) \\ &= p_c \cdot s \cdot \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

док за $i \neq j$ следи:

$$\begin{aligned} Cov(\mu_s^{(i)}, \mu_t^{(j)}) &= E(\mu_s^{(i)} \mu_t^{(j)}) - m_1 m_2 = E\left[\mu_s^{(i)} \left(\mu_s^{(j)} + \sum_{k=s}^{t-1} q_k \varepsilon_k^{(j)}\right)\right] - m_1 m_2 \\ &= Cov(\mu_s^{(i)}, \mu_s^{(j)}) = p_c \cdot s \cdot \rho \cdot \sigma_1 \sigma_2. \end{aligned}$$

Очито, последње две једначине потврђују други део једнакости (5.5).

Одговарајуће једначине за основне GSB-серије $(Y_t^{(i)})$, $i = 1, 2$, могу се добити на сличан начин. Најпре, према једначини (5.1) добија се:

$$E(Y_t^{(i)}) = E(\mu_t^{(i)}) + E(\varepsilon_t^{(i)}) = m_i, \quad i = 1, 2,$$

док се за варијансу серија $(Y_t^{(i)})$, добија:

$$Var(Y_t^{(i)}) = Var(\mu_t^{(i)}) + Var(\varepsilon_t^{(i)}) = (1 + p_c t) \sigma_i^2, \quad t \geq 0. \quad (5.9)$$

Такође, унакрсна коваријанса између $(Y_t^{(1)})$ и $(Y_t^{(2)})$ се одређује на следећи начин:

$$Cov(Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}) = Cov(\mu_t^{(1)}, \mu_t^{(2)}) + Cov(\varepsilon_t^{(1)}, \varepsilon_t^{(2)}) = (1 + p_c t) \rho \sigma_1 \sigma_2, \quad (5.10)$$

што потврђује први део једнакости (5.6). Најзад, користећи претходни резултат и једнакост (5.1), за векторе Y_s, Y_t , и било које $t > s > 0$ добија се:

$$Cov(Y_s^{(i)}, Y_t^{(i)}) = E(Y_s^{(i)} Y_t^{(i)}) - m_i^2 = E(\mu_s^{(i)} \mu_t^{(i)}) + E(\varepsilon_s^{(i)}, \mu_t^{(i)}) - m_i^2$$

$$\begin{aligned}
&= Cov(\mu_s^{(i)}, \mu_t^{(i)}) + p_c Var(\varepsilon_s^{(i)}) = p_c \sigma_i^2 (s + 1), \\
Cov(Y_s^{(i)}, Y_t^{(j)}) &= E(Y_s^{(i)} Y_t^{(j)}) - m_1 m_2 = Cov(\mu_s^{(i)}, \mu_t^{(j)}) + E(\varepsilon_s^{(i)} \mu_t^{(j)}) \\
&= p_c \rho \sigma_1 \sigma_2 (s + 1).
\end{aligned}$$

Одавде се једноставно добија друга једнакост у (5.6). ■

Напомена 5.1. Претходна теорема пружа неке додатне информације о стохастичкој структури 2D-GSB процеса. Наиме, за разлику од основне векторске серије (Y_t) , која може имати изненадне и изражене флукуације, серија (μ_t) је $\mathcal{F}_{t-1}$ мерљива и стога представља компоненту предвидљивости, тј. стабилности овог процеса, као што је приказано на горњим делу слике 5-1. Супротно томе, иновације (ε_t) су (адитивне) шумовне компоненте серије (Y_t) , тј. представљају основни извор наглашених флукуација 2D-GSB процеса.

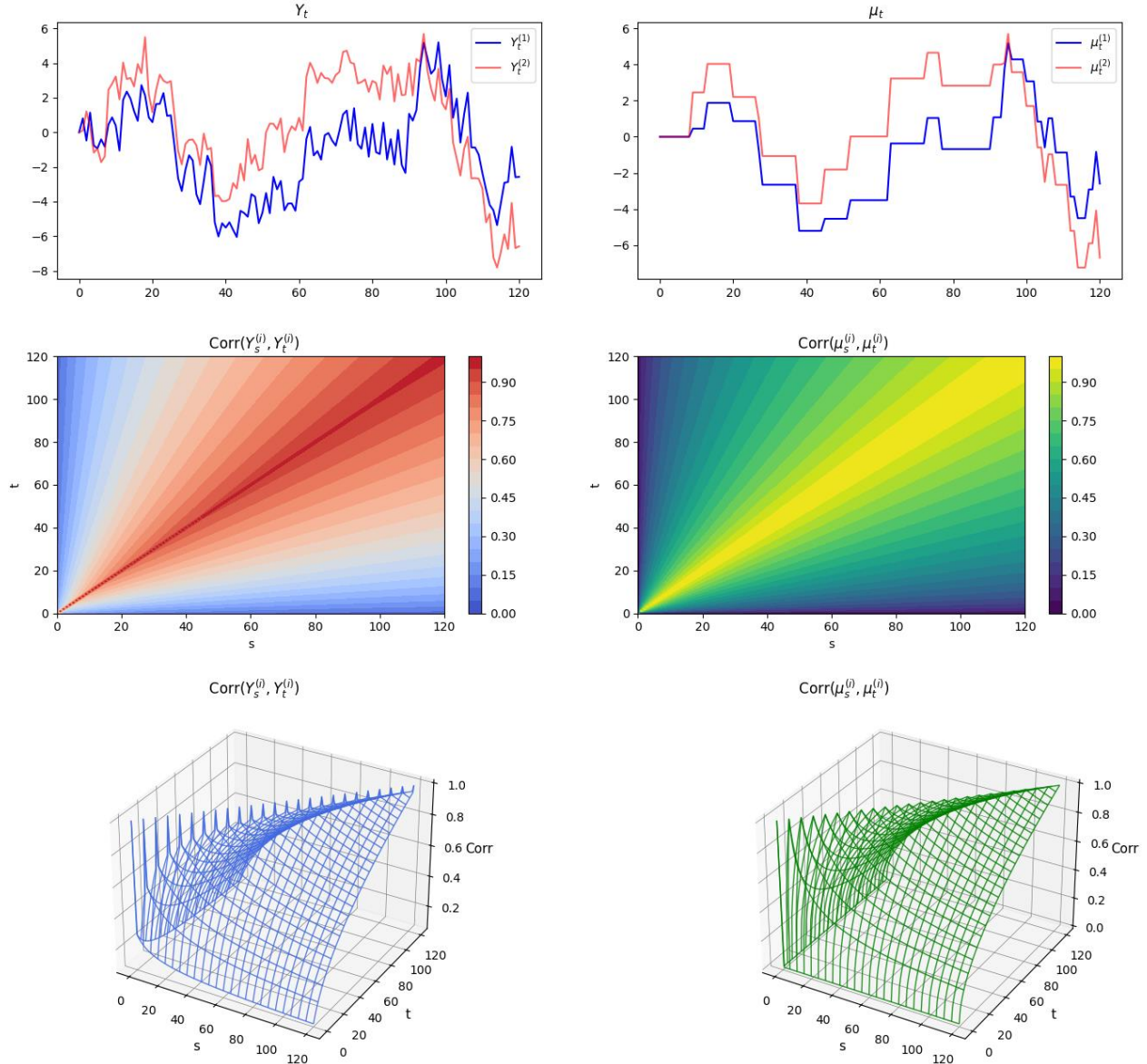
Даље, према једначинама (5.5) и (5.6) следи да су обе коваријационе матрице векторских серија (Y_t) и (μ_t) неконстантне, тј. варирају у зависности од временских променљивих $s, t \geq 0$, што указује на нестационарност ових серија. Користећи једнакости (5.5) – (5.10), аутокореелационе функције (енг. *Autocorrelation Function* – ACF) обеју компоненти ове две векторске серије добијају се на следећи начин:

$$\begin{aligned}
Corr(\mu_s^{(i)}, \mu_t^{(i)}) &= \frac{Cov(\mu_s^{(i)}, \mu_t^{(i)})}{\sqrt{Var(\mu_s^{(i)})} \cdot \sqrt{Var(\mu_t^{(i)})}} = \begin{cases} \frac{\min(s, t)}{\sqrt{s \cdot t}}, & s \neq t \\ 1, & s = t \end{cases} \\
Corr(Y_s^{(i)}, Y_t^{(i)}) &= \frac{Cov(Y_s^{(i)}, Y_t^{(i)})}{\sqrt{Var(Y_s^{(i)})} \cdot \sqrt{Var(Y_t^{(i)})}} = \begin{cases} \frac{p_c(1 + \min(s, t))}{\sqrt{(1 + p_c s) \cdot (1 + p_c t)}}, & s \neq t \\ 1, & s = t \end{cases}
\end{aligned}$$

Треба напоменути да су ови резултати потпуно аналогни резултатима једнодимензионалног GSB процеса, приказаног у (Стојановић, В. и сар., 2014). Притом, аутокореелације мартингалних средњих вредности су L^2 – непрекидне, јер важи:

$$\lim_{s \rightarrow t} Corr(\mu_s^{(i)}, \mu_t^{(i)}) = \frac{t}{\sqrt{t^2}} = 1,$$

док ACF векторске серије (Y_t) очито не задовољава услов L^2 – непрекидности, као што се може уочити на доњим дијаграмима слике 5-1.



Слика 5-1. Дијаграми изнад: Динамика нестационарних компоненти 2D-GSB процеса. Остали дијаграми: Аутокорелационе функције нестационарних компоненти. (Вредности параметра су $\mu = 0, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1, \rho = 0,6$ и $c \approx 3,8$)

Притом, приметимо да су аутокорелације, као и варијансе, израженије код серије (Y_t) , у односу на мартингалне просеке (μ_t) . То је последица укључивања додатног шумовног члана, као што се може такође видети на доњим графиконима слике 5-1. Коначно, користећи једнакости (5.7)–(5.10), за интеркорелацију између компоненти горе наведених процеса се једноставно добија:

$$\text{Corr}(\mu_t^{(1)}, \mu_t^{(2)}) = \text{Corr}(Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}) = \rho.$$

Дакле, за разлику од претходних вредности, обе интеркорелације су константне и једнаке интеркорелацијама компоненти иновација (ε_t), без обзира на време t , што значи да се сви посматрани процеси развијају на исти начин као код иновационих серија. ■

У наставку, дефинишемо још једну компоненту, тзв. низ прираштаја 2D-GSB процеса, као векторску серију $\mathbf{X}_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})^T$ која задовољава једнакост:

$$X_t^{(i)} = Y_t^{(i)} - Y_{t-1}^{(i)} = (\mu_t^{(i)} - \mu_{t-1}^{(i)}) + (\varepsilon_t^{(i)} - \varepsilon_{t-1}^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Према једнакостима из (5.1), (5.4) и (5.5), лако се види да се компоненте векторског низа ($\mathbf{X}_t$) могу представити на следећи начин:

$$X_t^{(i)} = \varepsilon_t^{(i)} - r_{t-1} \varepsilon_{t-1}^{(i)}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

где је $r_t = 1 - q_t = I(\|\varepsilon_t\|^2 \leq c)$. На тај начин, векторска серија ($\mathbf{X}_t$) јесте нелинеарни стохастички процес „близак“ стандардним векторским процесима покретног просека (енг. *Moving Average* – *MA* процеси) првог реда, али са случајним коефицијентом r_t . Прецизније речено, серија ($\mathbf{X}_t$) функционише у два режима:

а) Наглашене флукуације иновација (ε_t) у претходном тренутку ($t - 1$) имплицирају једнакост $r_{t-1} = 0$, тако да једнакост (5.12) постаје $X_t^{(i)} = \varepsilon_t^{(i)}$.

б) Флукуације ε_{t-1} које не прелазе критичну вредност c дају једнакост $r_{t-1} = 1$. Тада вредност $X_t^{(i)}$ има облик стандардног, линеарног *MA*(1) процеса, тј. важи $X_t^{(i)} = \varepsilon_t^{(i)} - \varepsilon_{t-1}^{(i)}$.

На тај начин, векторска серија ($\mathbf{X}_t$) има слична својства као и векторски *MA*(1) модел, па се његова стохастичка својства (средња вредност, коваријациона матрица, аутокорелациона функција) могу се добити једноставним израчунавањем.

Теорема 5.2. Нека је ($\mathbf{X}_t$) векторска серија дефинисана једнакостима (5.11) и (5.12). Тада ($\mathbf{X}_t$) има нулту средњу вредност и коваријациону матрицу:

$$\Gamma_x(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} (2 - p_c)\Sigma, & h = 0 \\ (p_c - 1)\Sigma, & h = \pm 1 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2}, & |h| \geq 2. \end{cases} \quad (5.13)$$

Поред тога, аутокорелациона функција компоненти ($X_t^{(i)}$), $i = 1, 2$ гласи:

$$\rho_x(h) = \frac{Cov(X_t^{(i)}, X_{t+h}^{(i)})}{Var(X_t^{(i)})} = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \frac{p_c - 1}{2 - p_c}, & h = \pm 1 \\ 0, & |h| \geq 2. \end{cases} \quad (5.14)$$

Доказ. Према дефиницији векторске серије $(\mathbf{X}_t)$, дате једнакостима (5.11) и (5.12), непосредно следи:

$$E(\mathbf{X}_t) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) - E(r_{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}) = \mathbf{0}_{2 \times 1}.$$

Даље, слично као у доказу претходне теореме, једнакост (5.13) се добија из једнакости:

$$\begin{aligned} Cov(X_t^{(i)}, X_{t+h}^{(i)}) &= E(X_t^{(i)} X_{t+h}^{(i)}) = E\left[\left(\varepsilon_t^{(i)} - r_{t-1} \varepsilon_{t-1}^{(i)}\right)\left(\varepsilon_{t+h}^{(i)} - r_{t+h-1} \varepsilon_{t+h-1}^{(i)}\right)\right] \\ &= \begin{cases} (2 - p_c)\sigma_i^2, & h = 0 \\ (p_c - 1)\sigma_i^2, & h = \pm 1 \\ 0, & |h| \geq 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} Cov(X_t^{(i)}, X_{t+h}^{(j)}) &= E(X_t^{(i)} X_{t+h}^{(j)}) = E\left[\left(\varepsilon_t^{(i)} - r_{t-1} \varepsilon_{t-1}^{(i)}\right)\left(\varepsilon_{t+h}^{(j)} - r_{t+h-1} \varepsilon_{t+h-1}^{(j)}\right)\right] \\ &= \begin{cases} (2 - p_c)\rho\sigma_1\sigma_2, & h = 0 \\ (p_c - 1)\rho\sigma_1\sigma_2, & h = \pm 1 \\ 0, & |h| \geq 2, \end{cases} \end{aligned}$$

где су $i, j = 1, 2$ и $i \neq j$. Најзад, једнакост (5.14) директно следи из (5.13) и (5.15). ■

Напомена 5.2. Према претходној теореме, очигледно је да векторска серија $(\mathbf{X}_t)$ јесте стационарна, са сличном структуром као у случају стандардне МА(1) векторске серије. Поред тога, из једнакости (5.11) и (5.12) следи:

$$Y_t^{(i)} - Y_{t-1}^{(i)} = \varepsilon_t^{(i)} - r_{t-1}\varepsilon_{t-1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad t = 1, 2, \dots$$

што представља тзв. нелинеарни интегрисани ауторегресивни модел покретних просека (енг. *Autoregressive Integrated Moving Averages – ARIMA* модел) са „повременим“ компонентама $(r_{t-1}\varepsilon_{t-1}^{(i)})$, $i = 1, 2$. Ова чињеница имплицира специфичну структуру (стационарне) векторске серије $(\mathbf{X}_t)$, као и других (нестационарних) компоненти 2D-GSB процеса, о чему се детаљније говори у наставку. ■

5.1.2 Дистрибутивна својства 2D-GSB процеса

Надаље разматрамо нека стохастичка својства основних компоненти 2D-GSB процеса, која се пре свега односе на њихову расподелу и асимптотско понашање. Притом, као што је претходно поменуто, векторска серија прираштаја $(\mathbf{X}_t)$ има важну улогу, првенствено због своје стационарности. Основне чињенице о расподели ове серије могу се изразити следећим тврђењем.

Теорема 5.3. *Нека је $q_t(c)$ индикатор шума дат једнакошћу (5.4) и $(\mathbf{X}_t)$ биваријантна временска серија дефинисана једнакостима (5.11) и (5.12). За произвољно $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $t = 0, 1, 2, \dots$, функција расподеле серије $(\mathbf{X}_t)$ је дата са:*

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := P\{\mathbf{X}_t < \mathbf{x}\} = p_c F_1(\mathbf{x}) + (1 - p_c) F_2(\mathbf{x}), \quad (5.16)$$

где су $F_1(\mathbf{x})$ и $F_2(\mathbf{x})$, респективно, функције расподеле биваријантних Гаусових случајних променљивих $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\sqrt{2}\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(0, 2\Sigma)$. Поред тога, за серију $(\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^2)$ важи следећа једнакост (у расподели):

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^2 \stackrel{d}{\Leftrightarrow} \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2, \quad (5.17)$$

где су $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ сопствене вредности матрице Σ , док су Z_1, Z_2 случајне променљиве са χ_1^2 расподелом.

Доказ. Користећи условне вероватноће и једнакост (5.12), за произвољно $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, функција расподеле биваријантних случајних променљивих $(\mathbf{X}_t)$ гласи:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &:= P\{\mathbf{X}_t < \mathbf{x}\} \\ &= P\{\mathbf{X}_t < \mathbf{x} \mid r_{t-1} = 0\} \cdot P\{r_{t-1} = 0\} + P\{\mathbf{X}_t < \mathbf{x} \mid r_{t-1} = 1\} \cdot P\{r_{t-1} = 1\} \\ &= P\{\boldsymbol{\varepsilon}_t < \mathbf{x}\} \cdot p_c + P\{\boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} < \mathbf{x}\} \cdot (1 - p_c), \end{aligned}$$

што непосредно имплицира једнакост (5.16). Штавише, сопствене вредности λ_1, λ_2 матрице $\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ су решења (у односу на λ) једначине $\det(\Sigma - \lambda I) = 0$, тј.

$$\lambda^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\lambda + (1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2 = 0.$$

Према Вијетовим формулама, следи:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 = (1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2 > 0,$$

тако да је $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Како је $\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ симетрична и позитивно дефинисана матрица, према познатој спектралној теорему (Horn & Johnson, 2013), постоји матрица $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ таква да важи:

$$PP^T = P^T P = I \quad \wedge \quad \Sigma = P \Lambda P^T.$$

Овде је $P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ортогонална матрица ($PP^T = P^T P = I$) ортонормираних сопствених вредности $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ матрице Σ , док је $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ дијагонална матрица сопствених вредности λ_1, λ_2 . Дефинишимо сада нову векторску серију:

$$\eta_t = P^T \epsilon_t = (\vec{v}_1^T \epsilon_t^{(1)}, \vec{v}_2^T \epsilon_t^{(2)}),$$

која задовољава једнакости:

$$E(\eta_t) = P^T E(\epsilon_t) = \mathbf{0}_{2 \times 1},$$

$$\text{Cov}(\eta_t) = E(\eta_t \eta_t^T) = E(P^T \epsilon_t \epsilon_t^T P) = P^T \Sigma P = P^T (P \Lambda P^T) P = \Lambda.$$

Дакле, $\eta_t = (\eta_t^{(1)}, \eta_t^{(2)})$ је биваријантна Гаусова временска серија, при чему је, очито, $\eta_t^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, \lambda_i)$, $i = 1, 2$ и $\eta_t^{(1)} \perp \eta_t^{(2)}$. На тај начин, једнакост (5.17) следи из $\epsilon_t = P \eta_t$, као и једнакости:

$$\|\epsilon_t\|^2 = \epsilon_t^T \epsilon_t = \eta_t^T P^T P \eta_t = \eta_t^T \eta_t = \|\eta_t\|^2. \blacksquare$$

Напомена 5.3. Слично као и код једнодимензионалног GSB процеса (Јовановић, М. и сар., 2022), диференцирањем једначине (5.16) се може добити биваријантна функција густине вероватноће векторске серије (X_t) на следећи начин:

$$f_x(x) = p_c f_1(x) + (1 - p_c) f_2(x),$$

где је:

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T (k\Sigma)^{-1} x\right), \quad k = 1, 2$$

функције густине вероватноћа биваријантних Гаусових расподела $\mathcal{N}(\mathbf{0}_{2 \times 1}, k\Sigma)$, $k = 1, 2$. На тај начин, расподела прираштаја (X_t) јесте конвексна линеарна комбинација две познате 2D нормалне дистрибуције са нултом средњом вредношћу и различитим коваријансим матрицама. На сличан начин, користећи стандардне стохастичке процедуре (Јоксимовић & Стојановић, 2019), за биваријантну карактеристичну функцију вектора (X_t) добија се:

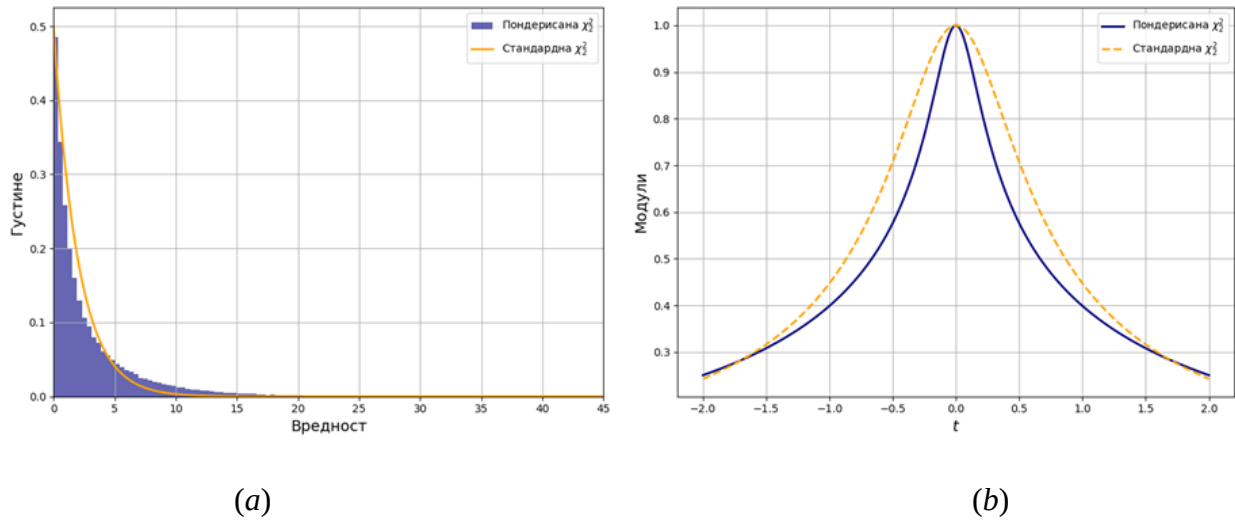
$$\begin{aligned}\varphi_X(\mathbf{u}) &= E(\exp i\langle \mathbf{u}, \mathbf{X}_t \rangle) = p_c \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}) + (1 - p_c) \varphi_{\sqrt{2}\varepsilon}(\mathbf{u}) \\ &= p_c \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u}\right) + (1 - p_c) \exp(-\mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u}),\end{aligned}\quad (5.18)$$

где је $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$, док је $\varphi_\varepsilon(\mathbf{u}) = \exp(-\mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u}/2)$ карактеристична функција биваријантних Гаусових случајних променљивих $(\varepsilon_t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$.

С друге стране, једнакост (5.17) указује на то да случајне променљиве $Z_t = \|\varepsilon_t\|^2$ имају тзв. *пондерисану χ^2 расподелу*. Уопштено речено, расподела величина (Z_t) се разликује од „обичне“ χ^2 расподеле, као што је приказано на слици 5-2, а њихова густина и функција расподеле немају затворени облик. Ипак, лако се уочава да се карактеристична функција ове расподеле може приказати на следећи начин:

$$\varphi_Z(u) = E(\exp(iu(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2))) = \varphi_{Z_1}(\lambda_1 u) \varphi_{Z_2}(\lambda_2 u) = ((1 - 2i\lambda_1 u)(1 - 2i\lambda_2 u))^{-1/2},$$

где је $u \in \mathbb{R}$. Ова једнакост, заједно са једнакошћу (5.18), може бити корисна приликом оцењивања непознатих параметара 2D-GSB модела, о чему ће бити више речи у наредном одељку ове дисертације. ■



Слика 5-2. Поређење функција густине вероватноћа (a) и модула карактеристичних функција (b) пондерисане и стандардне χ^2 расподеле. (Вредности параметара су: $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$ и $\rho = 0,8$, што имплицира да је $\lambda_1 \approx 0,263, \lambda_2 \approx 2,737$.)

Расподела биваријантних серија (μ_t) и (Y_t) , као нестационарних компоненти GSB процеса, може се описати на следећи начин:

Теорема 5.4. Нека су (Y_t) и (μ_t) биваријантне временске серије дефинисане, респективно, једначинама (5.1) и (5.3), при чему је $\mu_0 = (m_1, m_2)^\top$ (const). Тада су, за било које $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ и $t = 0, 1, 2, \dots$, функције расподеле ових серија:

$$\begin{aligned} F_\mu(\mathbf{x}, t) &:= P\{\mu_t < \mathbf{x}\} = \sum_{k=0}^t \pi_k^{(t)}(c) F_k(\mathbf{x}), \\ F_Y(\mathbf{x}, t) &:= P\{Y_t < \mathbf{x}\} = \sum_{k=0}^t \pi_k^{(t)}(c) F_{k+1}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5.19)$$

где су $\pi_k^{(t)}(c) = \binom{t}{k} p_c^k (1 - p_c)^{t-k}$ и $F_k(\mathbf{x})$, $k = 0, \dots, t$ функције расподеле биваријантних случајних променљивих са Гаусовом $\mathcal{N}(\mu_0, k\Sigma)$ расподелом. Штавише, важе следеће конвергенције (у расподели):

$$t^{-1/2} \mu_t \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, p_c \Sigma), \quad t^{-1/2} Y_t \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, p_c \Sigma), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (5.20)$$

Доказ. Дефинишимо најпре биваријантне случајне променљиве $\xi_t = q_t \varepsilon_t$, где је $t = 0, 1, \dots$. Лако се може доказати да је (ξ_t) серија међусобно некорелисаних случајних променљивих, са $E(\xi_t) = \mathbf{0}_{2 \times 1}$ и $\text{Cov}(\xi_t) = p_c \Sigma$. Поновном применом условних вероватноћа, функција расподеле за (ξ_t) добија се на следећи начин:

$$\begin{aligned} F_\xi(\mathbf{x}) &:= P\{\xi_t < \mathbf{x}\} = P\{\xi_t < \mathbf{x} | q_t = 1\} \cdot P\{q_t = 1\} + P\{\xi_t < \mathbf{x} | q_t = 0\} \cdot P\{q_t = 0\} \\ &= P\{\varepsilon_t < \mathbf{x}\} \cdot p_c + P\{\mathbf{0} < \mathbf{x}\} \cdot (1 - p_c) = p_c F_\varepsilon(\mathbf{x}) + (1 - p_c) F_\delta(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где је $F_\delta(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x} > \mathbf{0})$ функција расподеле биваријантне, константне случајне променљиве $\delta_0 \stackrel{as}{=} \mathbf{0}$. Према томе, за карактеристичну функцију случајних променљивих (ξ_t) добија се:

$$\varphi_\xi(\mathbf{u}) = E(\exp i\langle \mathbf{u}, \eta_t \rangle) = p_c \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}) + (1 - p_c) \varphi_\delta(\mathbf{u}) = p_c \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u}\right) + (1 - p_c),$$

где је $\varphi_\delta(\mathbf{u}) \equiv 1$ карактеристична функција случајне променљиве δ_0 . Сада, применом једнакости (5.3), за карактеристичне функцију мартингалних просека (μ_t) добијамо:

$$\varphi_\mu(\mathbf{u}, t) = E(\exp i\langle \mathbf{u}, \mu_t \rangle) = \exp(i\langle \mathbf{u}, \mu_0 \rangle) E\left(\prod_{s=1}^t \exp(iq_s \langle \mathbf{u}, \varepsilon_s \rangle)\right) \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(i\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0) \left(p_c \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right) + (1 - p_c) \right)^t \\
&= \exp(i\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0) \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} p_c^k (1 - p_c)^{t-k} \exp\left(-\frac{1}{2}k\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right),
\end{aligned}$$

где се у последњој једнакости користи биномна формула. Одавде, применом Левијеве теореме о кореспонденцији (Williams, 1991), непосредно следи прва једнакост у (5.19). Слично, коришћењем једнакости (5.1) и (5.21), за карактеристичне функције биваријантне серије $(\mathbf{Y}_t)$ добија се:

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(\mathbf{u}, t) &= E(\exp i\langle \mathbf{u}, \mathbf{Y}_t \rangle) = \varphi_\mu(\mathbf{u}, t) \cdot \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}) \\
&= \exp(i\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0) \left(p_c \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right) + (1 - p_c) \right)^t E(\exp(i\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_t \rangle)) \\
&= \exp\left(i\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right) \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} p_c^k (1 - p_c)^{t-k} \exp\left(-\frac{1}{2}k\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right) \quad (5.22) \\
&= \exp(i\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0) \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} p_c^k (1 - p_c)^{t-k} \exp\left(-\frac{1}{2}(k+1)\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right),
\end{aligned}$$

па се поновном применом Левијеве теореме добија друга једнакост у (5.19).

Да би се доказао други део теореме, тј. конвергенције дате у (5.20), приметимо да се карактеристичне функције биваријантних случајних променљивих $t^{-1/2}\boldsymbol{\mu}_t$ и $t^{-1/2}\mathbf{Y}_t$, $t = 1, 2, \dots$, према претходно добијеним једнакостима (5.21) и (5.22), могу се написати на следећи начин:

$$\begin{aligned}
\varphi_\mu(t^{-1/2}\mathbf{u}, t) &= \exp\left(\frac{i\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0}{\sqrt{t}}\right) \left(1 + p_c \left(\exp\left(-\frac{1}{2t}\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right) - 1 \right) \right)^t, \\
\varphi_Y(t^{-1/2}\mathbf{u}, t) &= \exp\left(\frac{i\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0}{\sqrt{t}}\right) \left(1 + p_c \left(\exp\left(-\frac{1}{2t}\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right) - 1 \right) \right)^t \exp\left(-\frac{1}{2t}\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right).
\end{aligned}$$

Након логаритмовања и развоја експоненцијалних чланова, када $t \rightarrow +\infty$, добијамо:

$$\begin{aligned}
\ln \varphi_\mu(t^{-1/2}\mathbf{u}, t) &= \frac{i\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0}{\sqrt{t}} + t \ln \left(1 + p_c \left(\exp\left(-\frac{1}{2t}\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right) - 1 \right) \right) \\
&= -\frac{p_c}{2}\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u} + \mathcal{O}(t^{-1/2}),
\end{aligned}$$

$$\ln \varphi_Y(t^{-1/2}\mathbf{u}, t) = \ln \varphi_\mu(t^{-1/2}\mathbf{u}, t) - \frac{\mathbf{u}^\top \Sigma \mathbf{u}}{2t} = -\frac{p_c}{2} \mathbf{u}^\top \Sigma \mathbf{u} - \frac{1}{2t} \mathbf{u}^\top \Sigma \mathbf{u} + \mathcal{O}(t^{-1/2}),$$

одакле следи:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_\mu(t^{-1/2}\mathbf{u}, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_Y(t^{-1/2}\mathbf{u}, t) = \exp\left(-\frac{p_c}{2} \mathbf{u}^\top \Sigma \mathbf{u}\right).$$

Очигледно, овако добијене граничне вредности представљају карактеристичне функције биваријантне Гаусове расподеле $\mathcal{N}(0, p_c \Sigma)$, што потврђује обе конвергенције дате у једнакостима (5.20). ■

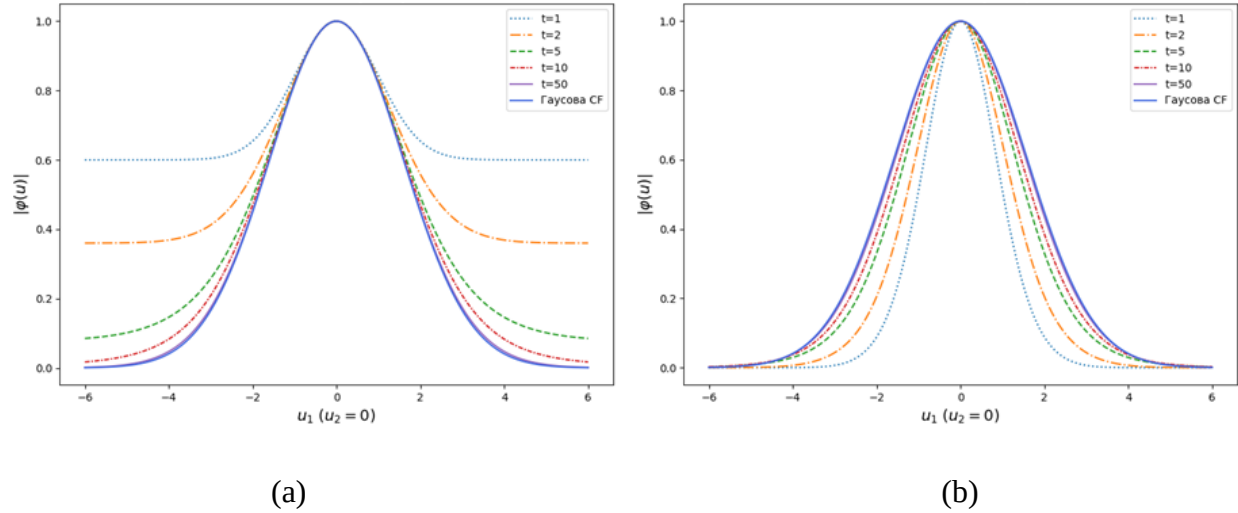
Напомена 5.4. На основу претходних резултата, карактеристичне функције оба случајна процеса (μ_t) и (Y_t) представљају конвексне комбинације (тј. мешавине) Гаусових карактеристичних функција са биномним тежинама. Притом, индикатори $q_t \sim \text{Bernoulli}(p_c)$, $t = 1, 2, \dots$ јесу међусобно независне Бернулијеве случајне променљиве, што имплицира:

$$K_t := \sum_{s=1}^t q_s \sim \text{Binom}(t, p_c).$$

Према једначинама (5.19), следи да за $K_t = k$ оба процеса (μ_t) и (Y_t) имају Гаусову расподелу $\mu_t | (K_t = k) \sim \mathcal{N}(\mu_0, k\Sigma)$, $Y_t | (K_t = k) \sim \mathcal{N}(\mu_0, (k+1)\Sigma)$. Дакле, њихове маргиналне расподеле су коначне Гаусове смеше са тежинама:

$$\mu_t \sim \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} p_c^k (1-p_c)^{t-k} \mathcal{N}(\mu_0, k\Sigma), \quad Y_t \sim \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} p_c^k (1-p_c)^{t-k} \mathcal{N}(\mu_0, (k+1)\Sigma).$$

Ова репрезентација приказује латентну биномно-Гаусову мешовиту структуру која лежи у основи оба нестационарна процеса (μ_t) и (Y_t) . С друге стране, једначине (5.20) показују да чак и нестационарне биваријантне серије (μ_t) и (Y_t) , у граничном случају, када $t \rightarrow +\infty$, генеришу Гаусову расподелу. Ова чињеница је од значаја у практичној примени 2D-GSB процеса, а може се лако уочити и на слици 5-3, где је приказана конвергенција модула карактеристичних функција обеју серија (μ_t) и (Y_t) , за различите вредности временских индекса. ■



Слика 5-3. Конвергенције модула карактеристичних функција биваријантних случајних величина $t^{-1/2}\mu_t$ (a) и $t^{-1/2}Y_t$ (b), за $t = 1, 2, \dots, 50$. (Вредности параметара су: $p_c = 0,4$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ и $\rho = 0,6$.)

Слично као у једнодимензионалном случају, нека додатна асимптотска својства нестационарних дводимензионалних серија (μ_t) и (Y_t) се могу описати у терминима њихових (линеарних) трансформација. Реч је о тзв. *скалираним срединама*, које пружају (још једном) могућност проналажења конвергенција у расподели и асимптотску нормалност одговарајућих расподела. На тај начин може се формулисати следеће тврђење, које називамо *централна гранична теорема (ЦГТ)* за 2D-GSB процес:

Теорема 5.5 (Стојичић, С. и сар., 2026). *За произвољну вредност $\alpha \geq 1$ дефинишимо тзв. α -серије:*

$$M_{t,\alpha} = \frac{1}{t^\alpha} \sum_{s=1}^t \mu_s, \quad U_{t,\alpha} = \frac{1}{t^\alpha} \sum_{s=1}^t Y_s,$$

где су (μ_t) и (Y_t) нестационарне дводимензионалне временске серије дефинисане једнакостима (5.1) и (5.3), респективно. Тада важе следеће тврдње:

i) Када је $1 \leq \alpha \leq 3/2$, временске серије $M_{t,\alpha}$ и $U_{t,\alpha}$ имају асимптотски нормалну расподелу, тј. важе следеће релације, када $t \rightarrow +\infty$:

$$M_{t,\alpha} \sim \mathcal{N}\left(\mu_0 t^{1-\alpha}, \frac{p_c}{3} t^{3-2\alpha} \Sigma\right), \quad U_{t,\alpha} \sim \mathcal{N}\left(\mu_0 t^{1-\alpha}, \frac{p_c}{3} t^{3-2\alpha} \Sigma\right). \quad (5.23)$$

ii) Када је $\alpha > 3/2$, временске серије $M_{t,\alpha}$ и $U_{t,\alpha}$ асимптотски нестају, тј.

$$\mathbf{M}_{t;\alpha} \xrightarrow{d} \boldsymbol{\delta}_0, \quad \mathbf{U}_{t;\alpha} \xrightarrow{d} \boldsymbol{\delta}_0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (5.24)$$

Доказ. Најпре доказујемо тврђење теореме за дводимензионалну серију $(\mathbf{M}_{t;\alpha})$. По дефиницији серија $(\boldsymbol{\mu}_t)$ и $(\mathbf{M}_{t;\alpha})$, имамо да је:

$$\mathbf{M}_{t;\alpha} = \frac{1}{t^\alpha} \sum_{s=1}^t \boldsymbol{\mu}_s = \frac{1}{t^\alpha} \sum_{s=1}^t \left(\boldsymbol{\mu}_0 + \sum_{k=0}^{s-1} q_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \right) = \frac{1}{t^\alpha} \left(t \boldsymbol{\mu}_0 + \sum_{s=1}^t \sum_{k=0}^{s-1} \boldsymbol{\xi}_k \right) = t^{1-\alpha} \boldsymbol{\mu}_0 + \sum_{k=1}^t \frac{k}{t^\alpha} \boldsymbol{\xi}_{t-k}.$$

Дакле, дводимензионална серија $(\mathbf{M}_{t;\alpha})$ је збир некорелисаних случајних променљивих $\boldsymbol{\mu}_0$ и $\boldsymbol{\xi}_s = q_s \boldsymbol{\varepsilon}_s$, $s = 0, \dots, t-1$, тако да се карактеристичне функције за $(\mathbf{M}_{t;\alpha})$ могу добити на следећи начин:

$$\begin{aligned} \varphi_M(\mathbf{u}, t, \alpha) &= \varphi_\mu(t^{1-\alpha} \boldsymbol{\mu}_0, 0) \prod_{k=1}^t \varphi_{\xi} \left(\frac{k}{t^\alpha} \mathbf{u} \right) \\ &= \exp(it^{1-\alpha} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0) \prod_{k=1}^t \left[1 + p_c \left(\exp \left(-\frac{k^2}{2t^{2\alpha}} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u} \right) - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Логаритмовањем карактеристичне функције $\varphi_M(\mathbf{u}, t, \alpha)$ добија се функција:

$$\psi_M(\mathbf{u}, t, \alpha) := \ln \varphi_M(\mathbf{u}, t, \alpha) = it^{1-\alpha} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0 + \sum_{k=1}^t \ln \left[1 + p_c \left(\exp \left(-\frac{k^2}{2t^{2\alpha}} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u} \right) - 1 \right) \right],$$

па слично као у претходној теореме, узимајући асимптотску вредност за $\psi_M(\mathbf{u}, t, \alpha)$, када $t \rightarrow +\infty$, добијамо:

$$\begin{aligned} \psi_M(\mathbf{u}, t, \alpha) &= it^{1-\alpha} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0 - \frac{p_c}{2t^{2\alpha}} \sum_{k=1}^t k^2 \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u} + \mathcal{O}(t^{3-2\alpha}) \\ &= it^{1-\alpha} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0 - \frac{p_c t(t+1)(2t+1)}{12t^{2\alpha}} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u} + \mathcal{O}(t^{3-2\alpha}) \\ &= it^{1-\alpha} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0 - \frac{p_c t^{3-2\alpha}}{6} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u} + \mathcal{O}(t^{3-2\alpha}) \\ &\approx \begin{cases} it^{1-\alpha} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0 - \frac{p_c t^{3-2\alpha}}{6} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}, & 1 \leq \alpha \leq 3/2 \\ 0, & \alpha > 3/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Заменом последњег члана у карактеристичну функцију $\varphi_M(\mathbf{u}, t, \alpha)$ и применом Левијеве теореме о кореспонденцији, једноставно се добијају прве релације у (5.23) и (5.24).

Доказ за серију $(\mathbf{U}_{t;\alpha})$ може се добити на аналоган начин. Користећи једнакост (5.1), као и претходно доказане чињенице, имамо да је:

$$\mathbf{U}_{t;\alpha} = t^{-\alpha} \sum_{j=1}^t (\boldsymbol{\mu}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j) = \mathbf{M}_{t;\alpha} + t^{-\alpha} \sum_{j=1}^t \boldsymbol{\varepsilon}_j,$$

где је $t^{-\alpha} \sum_{j=1}^t \boldsymbol{\varepsilon}_j \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, t^{1-2\alpha} \boldsymbol{\Sigma})$. Одавде се добијају карактеристичне функције за $(\mathbf{U}_{t;\alpha})$:

$$\begin{aligned} \varphi_U(\mathbf{u}, t, \alpha) &= \varphi_M(\mathbf{u}, t, \alpha) \prod_{j=1}^t \varphi_{\varepsilon}(t^{-\alpha} \mathbf{u}) \\ &= \exp(it^{1-\alpha} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0) \exp\left(-\frac{t^{1-2\alpha}}{2} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right) \prod_{k=1}^t \left[1 + p_c \left(\exp\left(-\frac{k^2}{2t^{2\alpha}} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right) - 1\right)\right]. \end{aligned}$$

Користећи сличан поступак као у претходном делу доказа, тј. узимајући логаритам функције $\varphi_U(\mathbf{u}, t, \alpha)$, добијамо:

$$\begin{aligned} \psi_U(\mathbf{u}, t, \alpha) &:= \ln \varphi_U(\mathbf{u}, t, \alpha) \\ &= it^{1-\alpha} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0 - \frac{t^{1-2\alpha}}{2} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u} + \sum_{k=1}^t \ln \left[1 + p_c \left(\exp\left(-\frac{k^2}{2t^{2\alpha}} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}\right) - 1\right)\right], \end{aligned}$$

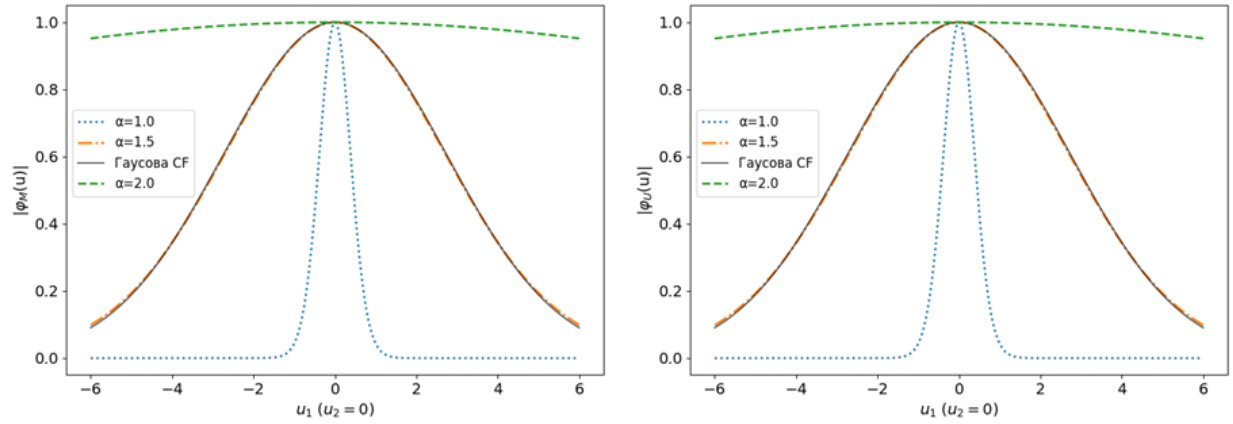
па узимањем асимптотских вредности, када $t \rightarrow +\infty$, следи:

$$\psi_U(\mathbf{u}, t, \alpha) \approx \begin{cases} it^{1-\alpha} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu}_0 - \left(\frac{t^{1-2\alpha}}{2} + \frac{p_c t^{3-2\alpha}}{6}\right) \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u}, & 1 \leq \alpha \leq 3/2 \\ 0, & \alpha > 3/2. \end{cases}$$

Заменом овог израза у функције $\varphi_U(\mathbf{u}, t, \alpha)$, добијају се друге релације у једнакостима (5.23) и (5.24), што у потпуности доказује теорему. ■

Напомена 5.5. Као илустрација претходне теореме, на слици 5-4 приказани су модули карактеристичних функција за скалиране серије $M_{t;\alpha}$ и $U_{t;\alpha}$, где је изабрано неколико репрезентативних вредности α . Треба напоменути да је за $0 < \alpha < 1$ нормализација ових серија преслаба да би стабилизовала раст нестационарних компоненти, тако да оба

скалирана процеса асимптотски имају бесконачну средњу вредност и варијансу. Стога, овај режим није одговарајући за асимптотску интерпретацију и не разматра се у раду.



Слика 5-4. Модули карактеристичних функција за дводимензионалне случајне променљиве $M_{t;\alpha}$ и $U_{t;\alpha}$, са различитим вредностима $\alpha > 0$ и временским хоризонтом $t = 50$. (Вредности параметара су исте као на претходној Слици 5-3)

Преостали случајеви поменути у теорему 5.5 могу се практично интерпретирати на следећи начин:

- Када је $1 \leq \alpha < 3/2$, обе серије $(M_{t;\alpha})$ и $(U_{t;\alpha})$ имају приближно биваријантну Гаусову расподелу, са средњом вредношћу која конвергира ка нули, док њихове матрице варијансе-коваријансе дивергирају.
- За $\alpha > 3/2$, обе серије конвергирају у расподели ка нултом дводимензионалном вектору $0 := (0,0)^\top$. Према добро познатим чињеницама (Billingsley, 1999), тада важе и конвергенције у вероватноћи, односно $M_{t;\alpha} \xrightarrow{P} 0$, $U_{t;\alpha} \xrightarrow{P} 0$, $t \rightarrow +\infty$.
- Најзад, случај $\alpha = 3/2$ је од посебног интереса, јер тада асимптотске релације (5.23) постају:

$$t^{-3/2} \sum_{j=1}^t \mu_j \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{p_c}{3} \Sigma\right), \quad t^{-3/2} \sum_{j=1}^t Y_j \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{p_c}{3} \Sigma\right), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (5.25)$$

Треба напоменути да обе ове конвергенције, у поређењу са оним датим једначином (5.20), имају мању варијансу, што је корисно у практичној примени 2D-GSB процеса. ■

5.1.3 Оцене параметара

У овом одељку разматра се проблем оцењивања непознатих параметара 2D-GSB процеса, којих постоји неколико: вредност критичног прага (c), односно, еквивалентно, вероватноћа режима p_c , средња вредност $\boldsymbol{\mu}_0 = (m_1, m_2)^\top$, као и елементи коваријационе матрице $(\sigma_1, \sigma_2, \rho)$. У ту сврху, треба напоменути да иако су основне 2D-GSB компоненте (Y_t) и (μ_t) нестационарне, а њихови асимптотски резултати су изведени под одговарајућим скалирањем, као што је наведено у теоремама 5.4 и 5.5. Оцена структуре средње вредности ослања се на ове резултате скалирања основне серије (Y_t) , док су оцене преосталих параметара првенствено заснована на стационарном процесу прираштаја (X_t) , чија су стохастичка својства формално утврђена теоремама 5.2 и 5.3. Притом, специфичност мешовите структуре серије (X_t) захтева неке додатна разматрања, као и испитивање перформанси процеса оцењивања. У ту сврху, најпре се примењује метод момената (енг. *Method of Moments* – *MoM*), а затим користи метод оцењивања заснован на емпиријским карактеристичним функцијама (енг. *Empirical Characteristic Function* – *ECF* метод). За обе ове методе оцењивања, под одређеним условима регуларности, доказана су асимптотска својства добијених оцена, а затим утврђен њихов квалитет и перформансе на коначним узорцима.

5.1.3.1 Метод момената

Нека је (X_t) , $t = 0, 1, \dots, T$ реализација прираштаја 2D-GSB процеса, при чему је $X_0 = (0, 0)^\top$. Према теорему 5.2, односно једначини (5.13), за коваријансу серије (X_t) важи:

$$\Gamma_X(0) = \text{Cov}(X_t, X_t) = (2 - p_c)\Sigma, \quad \Gamma_X(1) = \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) = (p_c - 1)\Sigma,$$

одавде следи:

$$\Gamma_X(1) = \frac{p_c - 1}{2 - p_c} \cdot \Gamma_X(0).$$

На основу тога, користећи узорачке коваријационе матрице:

$$\hat{\Gamma}_X(0) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t X_t^\top, \quad \hat{\Gamma}_X(1) = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_t X_{t-1}^\top$$

може се израчунати следећа оцена за пропорцију $r = (p_c - 1)/(2 - p_c)$:

$$\hat{r} = \frac{\text{tr } \hat{\Gamma}_X(1)}{\text{tr } \hat{\Gamma}_X(0)},$$

где су $\text{tr } \hat{\Gamma}_X(0)$ и $\text{tr } \hat{\Gamma}_X(1)$ трагови датих матрица. Одавде се добија оцена параметра p_c по методу момената:

$$\hat{p}_c = \frac{1 + 2\hat{r}}{1 + \hat{r}}. \quad (5.26)$$

На основу овако процењене вредности $\hat{p}_c$ одговарајућа оцена критичне вредности $c = \hat{c}$ може се одредити као решење једначине:

$$P\{\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^2 \leq c\} = \hat{p}_c.$$

Према једначинама (5.14) и (5.26), може се лако уочити да су $\hat{p}_c$ и $\hat{c}$ валидне оцене ако важе следеће неједнакости:

$$0 < \hat{p}_c < 1 \iff -0,5 < \hat{r} < 0.$$

Треба напоменути да су ови услови еквивалентни условима за једнодимензиони GSB процес (Стојановић, В. и сар., 2015). С друге стране коришћењем процењене вредности $\hat{p}_c$, коваријансна матрица 2D-GSB процеса може бити оцењена на основу једначине:

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{2 - \hat{p}_c} \hat{\Gamma}_X(0). \quad (5.28)$$

За процењене вредности $\hat{p}_c$ и $\hat{\Sigma}$, дате једначинама (5.27) и (5.28), респективно, кажемо да представљају МоМ-оцене за параметар p_c и коваријансну матрицу Σ . Истовремено, може се доказати њихова конзистентност и асимптотска нормалност. У том циљу, најпре доказујемо *строги закон великих бројева* (енг: *Strict Law of Large Numbers – SLLN*) и *скоро извесну постојаност* за тзв. *векторе момената*, који се користе у конструкцији МоМ-оцена.

Теорема 5.6. *Нека је $(\mathbf{X}_t)$ серија прираштаја 2D-GSB процеса, дефинисана једнакостима (5.11) и (5.12). Тада, за вектор $\mathbf{Z}_t := \text{vec}(X_t X_t^\top, X_t X_{t-1}^\top) \in \mathbb{R}^8$ важи следеће:*

- i) $\mathbb{E}\|\mathbf{Z}_t\|^2 < +\infty$, за свако $t = 1, 2, \dots, n$.
- ii) Серија $(\mathbf{Z}_t)$ је 2-зависна, тј, $\mathbf{Z}_t$ и $\mathbf{Z}_s$ су независни када је $|t - s| > 2$.
- iii) Вектор момената $\mathbf{V}_n := n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_t$ конвергира скоро извесно ка $\mathbb{E}(\mathbf{Z}_1)$, тј.

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_t \xrightarrow{as} \mathbb{E}(\mathbf{Z}_1), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (5.29)$$

iv) Серија $(\mathbf{V}_n)$ је асимптотски нормална, тј.,

$$\sqrt{n}(\mathbf{V}_n - \mathbb{E}(\mathbf{Z}_1)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Omega), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (5.30)$$

где је $\Omega := \sum_{h=-2}^2 \text{Cov}(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_{t+h}) = \text{Var}(\mathbf{Z}_t) + 2(\text{Cov}(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_{t+1}) + \text{Cov}(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_{t+2}))$.

Доказ. i) Пошто су компоненте вектора $\mathbf{Z}_t$ производи компоненти вектора $\mathbf{X}_t$ и $\mathbf{X}_{t-1}$, довољно је показати да су четврти моменти прираштаја $(\mathbf{X}_t)$ коначни, односно да важи $\mathbb{E}\|\mathbf{X}_t\|^4 < +\infty$, када је $t = 1, 2, \dots, n$. У ту сврху, користимо Јенсенову неједнакост (Gao, Sitharam, & Roitberg, 2019):

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p),$$

која важи за свако $a, b \geq 0$ и $p \geq 1$. Стављајући $p = 4$ и примењујући ову неједнакост на једнакост (5.11), добијамо:

$$\|\mathbf{X}_t\|^4 \leq 8(\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^4 + \|r_{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\|^4) = 8(\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^4 + r_{t-1}\|\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\|^4).$$

Узимајући математичко очекивање и користећи неједнакост $r_{t-1} \leq 1$, као и стационарност иновација $(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$, одатле следи:

$$\mathbb{E}\|\mathbf{X}_t\|^4 \leq 8(\mathbb{E}\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^4 + \mathbb{E}\|\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\|^4) = 16 \mathbb{E}\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^4.$$

При томе, серија $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t^{(1)}, \varepsilon_t^{(2)})^T \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ има коначне моменте било ког реда, а посебно:

$$\mathbb{E}\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^4 = \mathbb{E}\left(\left(\varepsilon_t^{(1)}\right)^4 + 2\left(\varepsilon_t^{(1)}\right)^2\left(\varepsilon_t^{(2)}\right)^2 + \left(\varepsilon_t^{(2)}\right)^4\right) = 3\sigma_1^4 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2(1 + 2\rho^2) + 3\sigma_2^4.$$

Дакле, важи $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^4 < +\infty$, па је стога и $\mathbb{E}\|\mathbf{X}_t\|^4 < +\infty$.

ii) По дефиницији прираштаја $(\mathbf{X}_t)$, они зависе (искључиво) од случајних променљивих $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$, за свако $t = 1, 2, \dots, n$. Пошто је $(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$ IID серија, следи да је $(\mathbf{X}_t)$ 1-зависна временска серија. Слично, компоненте $\mathbf{X}_t \mathbf{X}_{t-1}^\top$ зависе од $\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2}$, док $\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^\top$ зависе од $\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$. Према томе, случајни вектор $\mathbf{Z}_t$ зависи највише од скупа случајних вектора $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{t-2}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}, \boldsymbol{\varepsilon}_t\}$, па је векторска серија $(\mathbf{Z}_t)$ заиста 2-зависна.

iii) Пошто је серија $(\mathbf{Z}_t)$ 2-зависна, њене индексе можемо да поделимо у следећа три подскупа (према остатку при дељењу са 3):

$$A_0 = \{1, 4, 7, \dots\}, \quad A_1 = \{2, 5, 8, \dots\}, \quad A_2 = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Тада су за фиксно $j \in \{0, 1, 2\}$, елементи скупа $S_j := \{\mathbf{Z}_t \mid t \in A_j\}$ међусобно независни, и према i), имају заједнички коначан други моменат $E\|\mathbf{Z}_t\|^2$. Применом Колмогоровљевог строгог закона великих бројева за идентично расподељене и независне низове сличајних променљивих (Sen & Singer, 2000), добијамо:

$$\frac{1}{|A_j(n)|} \sum_{t \in A_j, t \leq n} \mathbf{Z}_t \xrightarrow{as} \mathbb{E}(\mathbf{Z}_1), \quad n \rightarrow +\infty,$$

где је $|A_j(n)| \leq n$ број елемената скупа A_j . Како важи $|A_j(n)|/n \rightarrow 1/3$, када $n \rightarrow +\infty$, следи:

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_t = \sum_{j=0}^2 \frac{|A_j(n)|}{n} \cdot \frac{1}{|A_j(n)|} \sum_{t \in A_j, t \leq n} \mathbf{Z}_t \xrightarrow{as} \sum_{j=0}^2 \frac{1}{3} \mathbb{E}(\mathbf{Z}_1) = \mathbb{E}(\mathbf{Z}_1).$$

Тиме је доказана конвергенција (5.29).

iv) Нека је $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ произвољан фиксни вектор. Према претходном, $U_t := \mathbf{a}^\top \mathbf{Z}_t$ је стационарна и 2-зависна серија скаларних случајних променљивих са коначним другим моментом:

$$\mathbb{E}(U_t^2) \leq \|\mathbf{a}\|^2 \mathbb{E}\|\mathbf{Z}_t\|^2 < +\infty.$$

Одавде, применом Hoeffding-Robbins-ове централне граничне теореме за m -зависне скаларне серије (Hoeffding & Robbins, 1948), добијамо:

$$\sqrt{n}(\bar{U}_n - \mathbb{E}(U_1)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_a^2), \quad n \rightarrow +\infty,$$

где је $\bar{U}_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n U_k$ и:

$$\sigma_a^2 = \sum_{h=-m}^m \text{Cov}(U_t, U_{t+h}) = \mathbf{a}^\top \left(\sum_{h=-m}^m \text{Cov}(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_{t+h}) \right) \mathbf{a} = \mathbf{a}^\top \Omega \mathbf{a},$$

за $m = 2$. Како је горе наведена конвергенција важи за свако $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, из Крамер-Волдове декомпозиције (Cuesta-Albertos, Fraiman, & Ransford, 2007) следи мултиваријантна асимптотска нормалност низа $(\mathbf{Z}_t)$ дата у (5.30). ■

Као последица претходне теореме, непосредно следи:

Последица 5.1. Нека су $\theta_0 = (p_0, \Sigma_0)$ праве вредности непознатих параметара вектора $\theta = (p_c, \Sigma)$ 2D-GSB процеса, где је $p_0 \in (0,1)$, а Σ_0 позитивно дефинисана матрица димензија 2×2 . Тада је оцењена вредност $\hat{\theta}_n = (\hat{p}_c, \hat{\Sigma})$, дефинисана једнакостима (5.26)-(5.28), строго конзистентна за θ_0 , тј.,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{as} \theta_0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (5.31)$$

Такође, $\hat{\theta}_n$ је асимптотски нормална оцена за θ_0 , тј.,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (5.32)$$

где је $V = D^\top \Omega D$, $D = \partial m(\theta) / \partial \theta^\top|_{\theta=\theta_0}$, $m(\theta) = (f(r(\theta)), g(\theta))^\top$, $f(r) = \frac{(2r+1)}{(1+r)}$, $r(\theta) = \text{tr} \frac{\Gamma(1, \theta)}{\text{tr}} \Gamma(0, \theta)$, $g(\theta) = \frac{\Gamma(0, \theta)}{(2-f(r(\theta)))}$, $\Gamma(h; \theta) = \text{Cov}_\theta(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-h})$.

Доказ. Очигледно је да је $\theta \mapsto m(\theta)$ узајамно-једнозначно и непрекидно пресликавање, дефинисано у некој околини правих вредности параметра θ_0 . На основу непрекидности скоро сигурне конвергенције, као и конвергенције у расподели (Serfling, 2002; Knight & Yu, 2002), непосредно следи дато тврђење. ■

Напомена 5.6. На основу последице 5.1 и једначина (5.26) – (5.28), важи $\hat{p}_c = f(\hat{r})$. Даље, вектори $(A_n, B_n)^\top = (\text{tr} \hat{\Gamma}_X(0), \text{tr} \hat{\Gamma}_X(1))^\top$ представљају линеарне функционале вектора момената $\mathbf{V}_n$, дефинисаних у Теорему 5.5, што имплицира:

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} A_n - A_0 \\ B_n - B_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma_{AB}),$$

где је $A_0 = \text{tr} \Gamma_X(0)$, $B_0 = \text{tr} \Gamma_X(1)$, и

$$\Sigma_{AB} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov} \left(\sqrt{n} \begin{pmatrix} A_n - A_0 \\ B_n - B_0 \end{pmatrix} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \text{Var}(\sqrt{n} A_n) & \text{Cov}(\sqrt{n} A_n, \sqrt{n} B_n) \\ \text{Cov}(\sqrt{n} A_n, \sqrt{n} B_n) & \text{Var}(\sqrt{n} B_n) \end{pmatrix}$$

означава асимптотску матрицу вектора $(A_n, B_n)^T$, која се добија као линеарна трансформација граничне коваријационе матрице Ω , дате једначином (5.30). Након одређених израчунавања, за асимптотску варијансу вредности оцено $\hat{p}_c$ се добија:

$$V_1 = f'(r_0)^2 \cdot \text{Var}(\sqrt{n}\hat{r}) = \frac{B_0^2 \text{Var}(A_n) - 2A_0B_0 \text{Cov}(A_n, B_n) + A_0^2 \text{Var}(B_n)}{A_0^4(1+r_0)^4},$$

где r_0 означава праву вредност односа $r(\theta_0)$. Ово показује да је асимптотска ефикасност оцено вредности $\hat{p}_c$ у потпуности одређена структуром зависности другог реда процеса прираштаја (X_t) , сумираном кроз скаларну статистику r . То омогућава поједностављену оцено варијансе у практичним применама, без потребе за познавањем пуне коваријационе матрице Ω . Истакнимо да су слична разматрања могућа и за оцено матрице $\hat{\Sigma}$, која је дефинисана једнакошћу (5.28). ■

5.1.3.2 Оцене засноване на емпиријским карактеристичним функцијама (ECF)

У овом одељку, оцењујемо непознате параметре 2D-GSB процеса користећи метод емпиријских карактеристичних функција (енг. *Empirical Characteristic Function* – *ECF метод*), који је први пут предложен и теоретски испитан у пионирским радовима Најта и Јуа (Knight & Yu, 2002), односно Јуа (Yu, 2004). Након тога, нека проширења оцена заснованих на ECF методу су размотрена у радовима (Kotchoni, 2012), (Meintanis, Swanepoel, & Allison, 2014; Meintanis, 2016) и неких других аутора. Пратећи ове идеје, овде је описан поступак оцено параметара заснован на ECF методу, сличан онима као у (Стојановић, В. и сар., 2016) и (Љајко, Е. и сар., 2023). Треба напоменути да суштина ECF метода лежи у чињеници да постоји бијективна кореспонденција између карактеристичних функција и њихових одговарајућих кумулативних функција расподеле (енг. *Cumulative Distribution Functions* – *CDFs*), при чему емпиријске карактеристичне функције (ECF) задржавају све информације присутне у узорку. Притом, теоријске карактеристичне функције (CF) су равномерно ограничене, што имплицира нумеричку стабилност добијених оцена. У том циљу, најпре дајемо општи облик за карактеристичне функције реда $\ell \geq 1$ серије прираштаја 2D-GSB процеса:

Теорема 5.7. Нека је биваријантна серија прираштаја (X_t) дефинисана једначинама (5.11) – (5.12), и нека је $\theta = (p_c, \Sigma)$ вектор непознатих параметара. За било коју дужину

блока $\ell \geq 1$ и било који вектор $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_\ell) \in (\mathbb{R}^2)^\ell$ ℓ -димензиона карактеристична функција:

$$\varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) = \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^{\ell} u_k^\top X_{t+k-1} \right) \right] \quad (5.33)$$

има следећу експлицитну репрезентацију:

$$\begin{aligned} \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) = \exp \left(-\frac{1}{2} \|u_\ell\|_\Sigma^2 \right) & \prod_{k=0}^{\ell-1} \left[p_c \exp \left(-\frac{1}{2} \|u_k\|_\Sigma^2 \right) \right. \\ & \left. + (1 - p_c) \exp(-\|u_k - u_{k+1}\|_\Sigma^2) \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

где је $u_0 = 0$, $p_c = P\{\|\varepsilon_t\|^2 > c\}$, $\|u\|_\Sigma^2 = \mathbf{u}^\top \Sigma \mathbf{u}$, када је $u \in \mathbb{R}^2$.

Доказ. Према једначини (5.18), очито је да исказ теореме важи за случај када је $\ell = 1$ и $u_1 = \mathbf{u}$. Претпоставимо стога да је $\ell > 1$ и означимо:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}; \theta) &:= \exp \left(i \sum_{k=1}^{\ell} u_k^\top X_{t+k-1} \right) = \exp \left[i \sum_{k=1}^{\ell} u_k^\top (\varepsilon_{t+k-1} - r_{t+k-2} \varepsilon_{t+k-2}) \right] \\ &= \exp \left[i \left(u_\ell^\top \varepsilon_{t+\ell-1} + \sum_{k=0}^{\ell-1} (u_k^\top - r_{t+k-1} u_{k+1}^\top) \varepsilon_{t+k-1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Заменом овог израза у једнакост (5.33), ℓ -димензиона карактеристична функција серије $(\mathbf{X}_t)$ се добија као $\varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) := E[\mathcal{L}(\mathbf{u}; \theta)]$, одакле се непосредно изводи једначина (5.34). ■

Даље, означимо са $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\}$ неку реализацију дужине $n \in \mathbb{N}$ прираштаја $(\mathbf{X}_t)$, као и њима одговарајућу ℓ - димензионалну ECF:

$$\hat{\varphi}_n^{(\ell)}(\mathbf{u}) := \frac{1}{n - \ell + 1} \sum_{t=1}^{n-\ell+1} \exp(i \mathbf{u}^\top \mathbf{X}_t^{(\ell)}), \quad (5.35)$$

где је $\mathbf{X}_t^{(\ell)} := (\mathbf{X}_t, \dots, \mathbf{X}_{t+\ell-1})$ тзв. преклапајући блок дужине $\ell \geq 1$. Основни принцип ECF метода јесте минимизирање „удаљености“ између теоријске CF и њене одговарајуће ECF, при чему се ECF оцене добијају минимизирањем циљне функције:

$$Q_n^{(\ell)}(\theta) := \int_{\mathbb{R}^{2\ell}} g(\mathbf{u}) \left| \varphi_X^{(\ell)}(u; \theta) - \hat{\varphi}_n^{(\ell)}(u) \right|^2 d\mathbf{u} \quad (5.36)$$

у односу на параметре $\theta = (p_c, \Sigma)$. Притом, овде је $d\mathbf{u} := du_1 \cdots du_\ell$, док је $g: \mathbb{R}^{2\ell} \rightarrow \mathbb{R}^+$ је нека тежинска функција. На тај начин, ECF оцене представљају решења следеће минимизационе једначине:

$$\hat{\theta}_n^{(\ell)} = \arg \min_{\theta \in \Theta} Q_n^{(\ell)}(\theta), \quad (5.37)$$

где је $\Theta = (0,1) \times (0, +\infty)^3$ нетривијалан параметарски простор. Користећи неке опште резултате ECF асимптотске теорије, јака конзистентност и асимптотска нормалност (AN) ECF оцена, под одређеним условима, може се доказати на следећи начин:

Теорема 5.8. *Нека је θ_0 права вредност параметра θ , а за произвољно $n = 1, 2, \dots$, нека су $\hat{\theta}_n^{(\ell)}$ решења једначине (5.37). Поред тога, претпоставимо да су задовољени следећи услови регуларности:*

(R₁) *Тежинска функција $g(u)$ је реална, ненегативна и интеграбилна, при чему је:*

$$\int_{\mathbb{R}^{2\ell}} \|u\|^2 g(u) du < +\infty.$$

(R₂) *Параметар θ се може идентификовати из ℓ -димензионалне карактеристичне функције, дате једначинама (5.33) – (5.34), тј. из једнакости $\varphi_X^{(\ell)}(u; \theta_1) = \varphi_X^{(\ell)}(u; \theta_2)$, за скоро све $u \in \mathbb{R}^{2\ell}$, следи $\theta_1 = \theta_2$, за било које $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$.*

(R₃) *За довољно велико $M > 0$ постоји компактан скуп $\Theta' = [0,1] \times [0,M]^3 \subset \bar{\Theta}$ такав да је $\theta_0, \hat{\theta}_n^{(\ell)} \in \text{int } \Theta'$, за било које $n \geq n_0 > 0$.*

(R₄) *Функција $\varphi_X^{(\ell)}(u; \theta)$ је два пута непрекидно диференцијабилна у односу на θ , и то униформно за $u \in \mathbb{R}^{2\ell}$.*

(R₅) *$\nabla_\theta^2 Q_n^{(\ell)}(\theta) \Big|_{\theta=\theta_0}$ је позитивно дефинитна, регуларна, ненула матрица.*

Тада, за било које $\ell \geq 2$, оцена $\hat{\theta}_n^{(\ell)}$ је строго постојана и асимптотски нормална оцена параметра θ .

Доказ. Најпре, означимо ECF за ℓ –блокове $\mathbf{X}_t^{(\ell)}$, дефинисане једначином (5.35), на следећи начин:

$$\hat{\phi}_n^{(\ell)}(\mathbf{u}) = \frac{1}{n - \ell + 1} \sum_{t=1}^{n-\ell+1} W_t(\mathbf{u}), \quad W_t(\mathbf{u}) := \exp\left(i \sum_{j=1}^{\ell} u_j^\top \mathbf{X}_{t+j-1}\right).$$

Према конструкцији процеса прираштаја $(\mathbf{X}_t)$, за свако фиксирано $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2\ell}$ серија $(W_t(\mathbf{u}))_{t \geq 1}$ је стриктно стационарна и $\ell + 1$ –зависна. Даље, важи једнакост $|W_t(\mathbf{u})| = 1$ за свако $t \geq 1$ и $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2\ell}$, тако да је $W_t(\mathbf{u}) \in L^1$. Стога, применом строгог закона великих бројева (SSLN) за m -зависну стационарну серију (Billingsley, 1999), следи:

$$\hat{\phi}_n^{(\ell)}(\mathbf{u}) \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}[W_1(\mathbf{u})] = \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta_0),$$

за свако фиксирано $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2\ell}$. У складу са непрекидношћу карактеристичних функција датих једначинама (5.33) – (5.34), претходна тачкаста конвергенција имплицира униформну конвергенцију на сваком компактном скупу $C \subset \mathbb{R}^{2\ell}$, тј.

$$\sup_{\mathbf{u} \in C} \left| \hat{\phi}_n^{(\ell)}(\mathbf{u}) - \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta_0) \right| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (5.38)$$

Даље, ако дефинишемо функцију:

$$Q_0^{(\ell)}(\theta) := \int_{\mathbb{R}^{2\ell}} g(\mathbf{u}) \left| \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) - \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta_0) \right|^2 d\mathbf{u} \geq 0,$$

онда је, према услову (R_1) , она добро дефинисана и непрекидна на компактном скупу Θ' . Додатно, из једнакости $Q_0^{(\ell)}(\theta) = 0$ и услова (R_2) следи да је $\theta = \theta_0$, односно функција $Q_0^{(\ell)}(\theta)$ има јединствени минимум у тачки θ_0 .

С друге стране, како су и емпиријске и теоријске карактеристичне функције униформно ограничене јединицом, применом сличне процедуре као у (Knight & Yu, 2002), добија се:

$$\begin{aligned} & \left| Q_n^{(\ell)}(\theta) - Q_0^{(\ell)}(\theta) \right| \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2\ell}} g(\mathbf{u}) \left(\left| \hat{\phi}_n^{(\ell)}(\mathbf{u}) - \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) \right|^2 - \left| \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) - \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta_0) \right|^2 \right) d\mathbf{u} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{2\ell}} g(\mathbf{u}) \left| \hat{\phi}_n^{(\ell)}(\mathbf{u}) - \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta_0) \right| \left(\left| \hat{\phi}_n^{(\ell)}(\mathbf{u}) - \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) - \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta_0) \right| \right) d\mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\leq 4 \int_{\mathbb{R}^{2\ell}} g(\mathbf{u}) \left| \hat{\varphi}_n^{(\ell)}(\mathbf{u}) - \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta_0) \right| d\mathbf{u}.$$

Одавде, конвергенција (5.38) и услов (R_3) дају униформну конвергенцију:

$$\sup_{\theta \in \Theta'} \left| Q_n^{(\ell)}(\theta) - Q_0^{(\ell)}(\theta) \right| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Коначно, применом Теореме 2.1 из (Newey & McFadden, 1994), добијамо:

$$\hat{\theta}_n^{(\ell)} \xrightarrow{a.s.} \theta_0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

односно, ECF оцена $\hat{\theta}_n^{(\ell)}$ је заиста строго постојана.

Показујемо сада асимптотску нормалност (AN) као особину оцене $\hat{\theta}_n^{(\ell)}$. У складу са условом (R_4) , функција $Q_n^{(\ell)}(\theta)$ је два пута диференцијабилна у околини тачке $\theta = \hat{\theta}_n^{(\ell)}$. Тада, применом Тејлоровог развоја ове функције, добија се:

$$\nabla_{\theta} Q_n^{(\ell)}(\hat{\theta}_n^{(\ell)}) = \nabla_{\theta} Q_n^{(\ell)}(\theta_0) + \nabla_{\theta}^2 Q_n^{(\ell)}(\bar{\theta}_n)(\hat{\theta}_n^{(\ell)} - \theta_0), \quad (5.39)$$

где је $\bar{\theta}_n$ нека вредност између $\hat{\theta}_n^{(\ell)}$ и θ_0 . Према дефиницији ECF оцене, дате једначином (5.37), важи једнакост $\nabla_{\theta} Q_n^{(\ell)}(\hat{\theta}_n^{(\ell)}) = 0$, па из једначине (5.39) следи:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(\ell)} - \theta_0) = -(\nabla_{\theta}^2 Q_n^{(\ell)}(\bar{\theta}_n))^{-1} \sqrt{n} \nabla_{\theta} Q_n^{(\ell)}(\theta_0). \quad (5.40)$$

У складу са наведеним својствима функције $Q_n^{(\ell)}(\theta)$, она се може диференцирати под знаком интеграла, тј. важи:

$$\nabla_{\theta} Q_n^{(\ell)}(\theta) = -2 \int_{\mathbb{R}^{2\ell}} g(\mathbf{u}) \left(\hat{\varphi}_n^{(\ell)}(\mathbf{u}) - \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) \right) \nabla_{\theta} \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) d\mathbf{u}, \quad (5.41)$$

као и

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta}^2 Q_n^{(\ell)}(\theta) &= 2 \int_{\mathbb{R}^{2\ell}} g(\mathbf{u}) \nabla_{\theta} \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) \nabla_{\theta} \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta)^{\top} d\mathbf{u} \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^{2\ell}} g(\mathbf{u}) \left(\varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) - \hat{\varphi}_n^{(\ell)}(\mathbf{u}) \right) \nabla_{\theta}^2 \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta) d\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Заменом $\theta = \theta_0$ и једнакости (5.35) у једначину (5.41), добијамо:

$$\sqrt{n} \nabla_{\theta} Q_n^{(\ell)}(\theta_0) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \psi_t + o_p(1),$$

где је:

$$\psi_t = \int_{\mathbb{R}^{2\ell}} g(\mathbf{u}) \left(e^{i\mathbf{u}^T \mathbf{x}_t^{(\ell)}} - \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta_0) \right) \nabla_{\theta} \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta_0) d\mathbf{u}.$$

При томе, серија (ψ_t) зависи (само) од $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t+\ell-1}$, тако да је она строго стационарна, $(\ell+1)$ –зависна и важи $\mathbb{E}\|\psi_t\|^2 < \infty$. Одавде, централна гранична теорема (ЦГТ) за строго стационарне, $(\ell+1)$ –зависне серије са коначним другим моментом даје конвергенцију:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \psi_t \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, D), \quad (5.43)$$

где $D = \sum_{k=-\ell}^{\ell} \text{Cov}(\psi_0, \psi_k)$. Поред тога, важи и конвергенција:

$$\nabla_{\theta}^2 Q_n^{(\ell)}(\bar{\theta}_n) \xrightarrow{a.s.} J, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (5.44)$$

где је, према услову (R_5) и једначини (5.42):

$$J = \mathbb{E} \left(\nabla_{\theta}^2 Q_n^{(\ell)}(\theta) \Big|_{\theta=\theta_0} \right) = 2 \int_{\mathbb{R}^{2\ell}} g(\mathbf{u}) \nabla_{\theta} \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta_0) \nabla_{\theta} \varphi_X^{(\ell)}(\mathbf{u}; \theta_0)^T d\mathbf{u} < +\infty.$$

На тај начин, једначине (5.40), (5.43) и (5.44) дају:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(\ell)} - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, J^{-1} D J^{-1}),$$

односно, $\hat{\theta}_n^{(\ell)}$ је заиста AN-оцена за праву вредност параметра θ_0 . ■

Напомена 5.7. Треба напоменути да асимптотска својства ECF оцене за 2D-GSB модел следе исте структурне принципе као и у једнодимензионалном случају (Стојановић, В. и сар., 2016). Дакле, мултиваријантна природа прираштаја $(\mathbf{X}_t)$ утиче само на аналитички облик карактеристичне функције, док исте особине као у једнодиманзионалном случају (стационарност, „краткорочне“ зависност и идентификабилност) обезбеђују ваљаност стандардне ECF асимптотске теорије.

Применом сличних разматрања као у (Yu, 2004), може се показати да претходно описана процедура важи ако је карактеристична функција реда $\ell \geq 1$ бар једнака броју њених параметара. У ту сврху, $\ell = 2$ представља минималну вредност која осигурава идентификабилност свих параметара модела. Заменом вредности $\ell = 2$ у једнакост (5.34), добија се експлицитни облик карактеристичне функције:

$$\begin{aligned}\varphi_X^{(2)}(u_1, u_2) = & \exp\left(-\frac{1}{2} u_2^\top \Sigma u_2\right) \left[p_c^2 \exp\left(-\frac{1}{2} u_1^\top \Sigma u_1\right) + p_c(1 - p_c) \exp(-u_1^\top \Sigma u_1) \right. \\ & + p_c(1 - p_c) \exp\left(-\frac{1}{2} (u_1 - u_2)^\top \Sigma (u_1 - u_2)\right) \\ & \left. + (1 - p_c)^2 \exp\left(-\frac{1}{2} (u_1 - u_2)^\top \Sigma (u_1 - u_2) - \frac{1}{2} u_1^\top \Sigma u_1\right) \right].\end{aligned}$$

На тај начин, поступак оцењивања се заснива на дводимензионалној ECF векторске серије $\mathbf{X}_t^{(2)} = (X_t^\top, X_{t+1}^\top)^\top \in \mathbb{R}^4$, $t = 1, \dots, T-1$, чији експлицитни израз за $\mathbf{u} = (u_1^\top, u_2^\top)^\top \in \mathbb{R}^4$ гласи:

$$\hat{\varphi}_T^{(2)}(u_1, u_2) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \exp(iu_1^\top X_t + iu_2^\top X_{t+1}) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \cos(u_1^\top X_t + u_2^\top X_{t+1}).$$

Притом, избор тежинске функције $g(\mathbf{u})$ има важну улогу у перформансама ECF оцено, па надаље користимо експоненцијално опадајућу тежинску функцију $g(\mathbf{u}) = e^{-\|\mathbf{u}\|^2}$, која обезбеђује нумеричку стабилност и задовољава услове дате у Теорему 5.8. ■

5.1.3.3 Оцена средње вредности

Нека је биваријантна серија $(\mathbf{Y}_t)$ 2D-GSB процеса дата једначином (5.1). Вектор средње вредности је тада $\boldsymbol{\mu} := \mathbb{E}(\mathbf{Y}_t)$, а његову природну оцену представља векторска средина узорка:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n := \bar{\mathbf{Y}}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Y}_t. \quad (5.45)$$

Како је $\mathbb{E}(\mathbf{Y}_t) = \boldsymbol{\mu}_0 = (m_1, m_2)^\top$, оцена $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n$ је непристрасна, тј. важи $\mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n) = \boldsymbol{\mu}$. Користећи репрезентацију серије $(\mathbf{Y}_t)$ преко иновација $(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$, дефинисаних у Теорему 5.5, оцена $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n$ може се написати као сума некорелираних вектора случајних величина:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n = \boldsymbol{\mu}_0 + \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n (1 + kq_{n-k}) \boldsymbol{\varepsilon}_{n-k} + \boldsymbol{\varepsilon}_n \right].$$

Одавде се добија њена коваријациона матрица:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n) &= \frac{1}{n^2} \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(1 + kq_{n-k})^2 + 1 \right] \Sigma \\ &= \frac{1}{n^2} \left[\sum_{k=1}^n (1 + p_c k(k+2)) + 1 \right] \Sigma = \frac{1}{n^2} \left[n + 1 + p_c \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \right] \Sigma \\ &= \frac{n+1}{n^2} \left(1 + p_c \frac{n(2n+7)}{6} \right) \Sigma = \frac{p_c n}{3} \Sigma + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

што имплицира да је варијанса оцене $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n$ неограничена.

Стога, слично као у (Јовановић, М. и сар., 2022), уводимо и тежинску (пондерисану) средину:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_n := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \bar{\mathbf{Y}}_t = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \omega_t \mathbf{Y}_t, \quad \omega_t := H(n) - H(t-1), \quad (5.46)$$

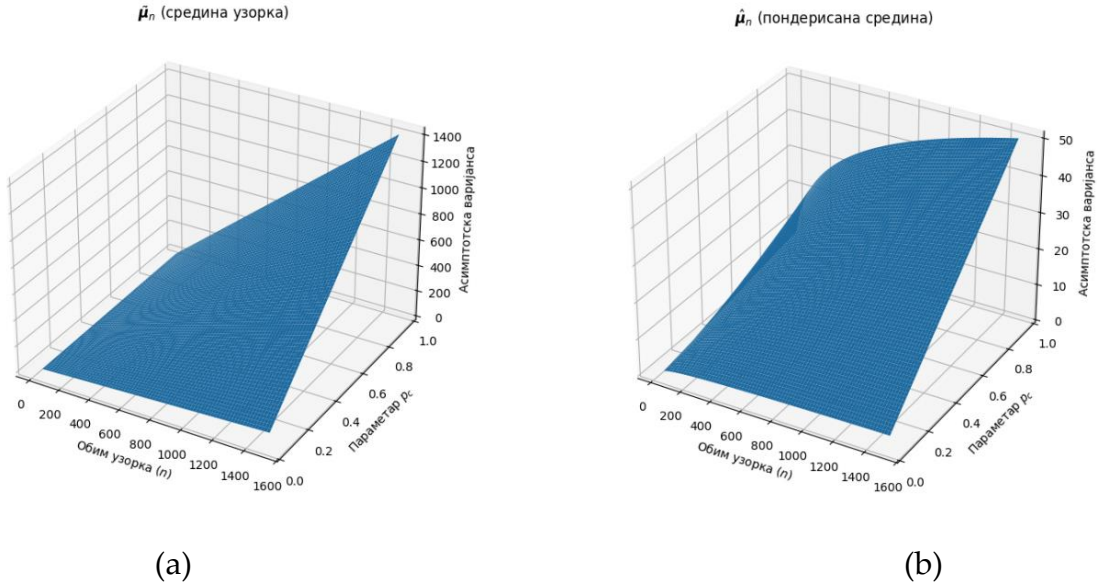
где $H(t) = \sum_{j=1}^t j^{-1}$ означава хармонијске бројеве, при чему је $H(0) = 0$. Приметимо да је $\mathbb{E}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_n) = \boldsymbol{\mu}$, тј. и $\hat{\boldsymbol{\mu}}_n$ представља непристрасну оцелу вектора $\boldsymbol{\mu}$. Користећи аналогу декомпозицију на збир некорелисаних случајних вектора као у (Јовановић, М. и сар., 2022), добијамо:

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_n) = p_c H^2(n) \Sigma + \mathcal{O}(H^2(n)), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Како је $H(n) \sim \ln n$, када $n \rightarrow +\infty$, следи да је:

$$\frac{\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_n)}{\text{Var}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n)} = \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Дакле, пондерисана средина $\hat{\boldsymbol{\mu}}_n$ јесте асимптотски ефикаснија оцелна од „обичне“ узорачке средње вредности $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n$. Ово се може видети и на слици 5-5, на којој је дат 3D приказ обе асимптотске варијансе, посматраних као функције променљивих $p_c \in (0,1)$ и $n > 0$. Треба напоменути да је овде коваријациона матрица Σ факторисана, тј., површине представљају скаларни део асимптотских варијанси.



Слика 5-5. 3D приказ асимптотских варијанси оцене $\tilde{\mu}_n$ (a) и оцене $\hat{\mu}_n$ (b), у зависности од параметра $p_c \in (0,1)$ и величине узорка $n > 0$.

5.1.4 Нумеричке симулације и примена модела

Овде се разматрају два важна аспекта везана за практичну имплементацију 2D-GSB процеса (Zeigler, Praehofer, & Kim, 2000). Најпре су спроведене нумеричке Монте Карло симулације основних серија 2D-GSB модела, за које су израчунате претходно описане оцене и анализирана њихова ефикасност. Затим је, на основу реалних података, приказана примена 2D-GSB процеса у анализи динамике и емпиријских расподела укупног броја различитих облика кривичних дела у Републици Србији.

5.1.4.1 Нумеричке симулације 2D-GSB оцена

У овом делу примењен је поступак оцењивања параметара 2D-GSB модела, на основу $S = 300$ независних Монте Карло репликација основних 2D-GSB серија. У првом кораку, генерише се серија иновација $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t^{(1)}, \varepsilon_t^{(2)})^\top$, као независних и идентично расподељених вектора са дводимензионалном нормалном расподелом $\mathcal{N}(0, \Sigma)$, а на основу њих се одређује низ индикатора $q_t(c)$, дефинисан једнакошћу (5.4). Након тога, конструише се основна 2D-GSB серија (Y_t) , са средњим вектором $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_0^{(1)}, \mu_0^{(2)})^\top$ и прираштајима (X_t) , који се користе за оцену непознатих параметара $\theta = (p_c, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)^\top$. Нумеричке симулације су дизајниране тако да испитају понашање предложених оцена на коначним узорцима, као и

да верификују теоријске резултате изведене у одељку 5.1.3. Конкретно, Монте Карло студија се фокусира на тачност, стабилност и асимптотска својства добијених оцена при поновљеном узорковању 2D-GSB процеса. Притом, за опсервирани низ (Y_t) узет је средњи вектор $\mu_0 = (\mu_0^{(1)}, \mu_0^{(2)})^\top = (0, 1)^\top$, за параметар прага изабрана је вредност $c = 4$, док је коваријациона матрица:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Вреди напоменути да тада, према претходним разматрањима (видети напомену 5.3), параметар p_c , дефинисан једнакошћу (5.4), представља тзв. функцију трајања мешовите χ^2_2 расподеле, која нема затворен облик. Стога је овај параметар овде процењен додатним Монте Карло експериментом са $N = 200.000$ независних реализација. Коришћењем тако опсежних симулација процењена вредност p_c добија се са високом тачношћу, тако да се може користити као референтна вредност. На овај начин, праве вредности параметара представљене су вектором $\theta_0 = (p_c, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)^\top = (0, 3967; 1; 4; 0, 5)^\top$.

Даље, оцене вектора μ_0 се израчунавају коришћењем оцена $\tilde{\mu}_n$ и $\hat{\mu}_n$, дефинисаних једнакостима (5.45) и (5.46), респективно. У ту сврху, посматране су реализације серије (Y_t) дужине $T = 150$, а дескриптивна статистика (минимум, средња вредност, максимум), заједно са одговарајућим грешкама оцењивања тако добијених оцена: пристрасности, стандардном девијацијом (SD) и средњом квадратном грешком (RMSE), приказана је у табели 5-1. Као што је горе поменуто, због нестационарности серије (Y_t) , оцене вектора средње вредности μ_0 имају неограничену асимптотску варијансу, тако да постоји велики распон њихових опсервираних вредности. Ипак, очигледно је да је оцена $\hat{\mu}_n$ ефикаснија од $\tilde{\mu}_n$, јер су његове статистике грешке знатно мање.

Како би се испитала асимптотска својства тако добијених оцена, оне су такође тестиране у односу на AN особину, а резултати ових тестова су такође приказани у табели 5-1. У ту сврху коришћена су следећа три статистичка теста нормалности:

- Шапиро-Вилксов тест нормалности (SW),
- Андерсон-Дарлинггов тест нормалности (AN),
- Жарке-Берин тест нормалности (JB).

Табела 5-1. Дескриптивна статистика и резултати AN тестирања процењених средњих вредности. (Дужина серије је $n = 150$, праве вредности параметара су $\mu_0^{(1)} = 0$, $\mu_0^{(2)} = 1$.)

Статистика	Оцена средње вредности		Пондерисана оцена	
	$(\tilde{\mu}_n)$		$(\hat{\mu}_n)$	
	$\tilde{\mu}_n^{(1)}$	$\tilde{\mu}_n^{(2)}$	$\hat{\mu}_n^{(1)}$	$\hat{\mu}_n^{(2)}$
Min	-12,160	-22,467	-7,9302	-14,305
Ср. вред.	-0,0756	0,7713	-0,0569	0,9442
Max	16,408	27,833	10,318	16,982
Bias ¹⁸	-0,0756	-0,2287	-0,0569	-0,0558
SD	4,3383	8,9660	2,7328	5,4760
RMSE	4,3317	8,9539	2,7289	5,4672
SW	0,9967	0,9970	0,9940	0,9971
(p -вредност)	(0,8003)	(0,8571)	(0,2827)	(0,8695)
AD	0,1182	0,2874	0,3676	0,3367
(p - вредност)	(0,9899)	(0,6182)	(0,4289)	(0,5042)
JB	1,2528	0,3156	2,8775	0,1155
(p - вредност)	(0,5345)	(0,8540)	(0,2372)	(0,9439)

Вредности тест-статистика, као и њима одговарајуће p -вредности (наведене у заградама), израчунате су коришћењем процедура из R-пакета „nortest“ (Gross & Ligges, 2026). Очигледно је да обе оцене $\tilde{\mu}_n$ и $\hat{\mu}_n$ имају AN својство, иако су добијени реализацијом нестационарне серије (Y_t) . Треба напоменути да је ово уско повезано са теоремама 5.4 и 5.5, које, између осталог, описују AN својства скалираних процеса заснованих на основној GSB-серији (Y_t) .

У наставку, коришћењем једначина (5.26)–(5.28), једноставно се добијају МоМ оцене правог параметра θ_0 , док се ECF оцене израчунавају минимизирањем интеграла датог једначином (5.36). У ту сврху, слично као у (Milovanović, 2015), користе се добро познате Гаус-Ермитове кубатуре, са тежинском функцијом $g(u_1, u_2) = \exp(-\|u_1\|^2 - \|u_2\|^2)$, где је $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, као са и 81 кубатурних чвороова. Притом, истакнимо да је цео поступак спроведен коришћењем R-пакета "statmod" (Giner & Smyth, 2016). Након тога, узимајући претходно добијене МоМ оцене као почетне вредности, циљна функција дата једначином (5.36) се минимизира коришћењем процедуре ограничене оптимизације „L-BFGS-B“ (Byrd,

¹⁸ Bias – пристрасност, представља системско одступање оцене неког параметра од његове стварне вредности, пристрасност оцене $\hat{\theta}$, за параметар θ дефинише се као $Bias(\hat{\theta}) = E(\theta) - \theta$.

Lu, Nosedal, & Zhu, 1995). Целокупан поступак је такође имплементиран у статистичком програмском језику „R“. Да би се испитала ефикасност предложене процедуре, као и друга претходно поменута асимптотска својства тако добијених оцена, разматрају се серије различитих дужина $T \in \{150, 500, 1500\}$. Њихова основна дескриптивна статистика, заједно са статистикама и p -вредностима горе поменутих тестова нормалности, такође је израчуната у статистичком софтверу „R“ и представљена у табелама 5-2, 5-3 и 5-4.

Табела 5-2. Резултати дескриптивне статистике и AN тестирања оцењених параметара. (Дужина серије је $T = 150$, а праве вредности параметара $p_c \approx 0,3967$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 4$, $\rho = 0,5$.)

Статистика	MoM				ECF			
	p_c	σ_1^2	σ_2^2	ρ	p_c	σ_1^2	σ_2^2	ρ
Min	0,0000	0,6768	2,7087	0,2738	0,0944	0,5628	2,8580	0,2820
Ср. вред.	0,3846	0,9845	4,0192	0,4973	0,3872	0,9987	4,0186	0,4982
Max	0,7135	1,3562	6,3611	0,6745	0,8229	1,4708	5,6043	0,7675
Bias	-0,0121	-0,0155	0,0192	-0,0027	-0,0095	-0,0013	0,0186	-0,0018
SD	0,1407	0,1381	0,6353	0,0785	0,1579	0,1618	0,5839	0,0862
MSE	0,1407	0,1384	0,6334	0,0784	0,1580	0,1613	0,5823	0,0860
SW	0,986**	0,995	0,985**	0,994	0,980*	0,996	0,984**	0,992
(p -вредност)	(0,005)	(0,376)	(0,004)	(0,329)	(0,026)	(0,735)	(0,002)	(0,083)
AD	0,850*	0,446	0,753*	0,261	0,933*	0,333	0,883*	0,602
(p -вредност)	(0,028)	(0,281)	(0,049)	(0,706)	(0,018)	(0,509)	(0,024)	(0,117)
JB	6,502*	2,066	8,054*	2,502	4,272	0,556	12,676**	4,816
(p -вредност)	(0,039)	(0,356)	(0,018)	(0,286)	(0,118)	(0,757)	(0,002)	(0,090)

* $p < 0,05$, ** $p < 0,01$

Приказани резултати указују на то да оба поступка оцењивања задовољавајуће функционишу, чак и за умерене величине узорка. Емпиријске средње вредности свих процењених параметара су веома близу њиховим стварним вредностима, док се одговарајуће пристрасности смањују се са повећањем величине узорка. Генерално, као што се и очекивало, дисперзије оцена мерене кроз њихове стандардне девијације и средње квадратне грешке такође се смањују са повећањем величине узорка. За веће узорке, укључујући и најдужу разматрану серију ($T = 1500$), оцене показују мало одступање и

умерену варијабилност по свим параметрима, што указује на њихову погодност за емпиријске примене засноване на дужим временским серијама.

*Табела 5-3. Резултати дескриптивне статистике и AN тестирања оцењених параметара.
(Дужина серије је $T = 500$, а праве вредности параметара исте као у табели 5-2.)*

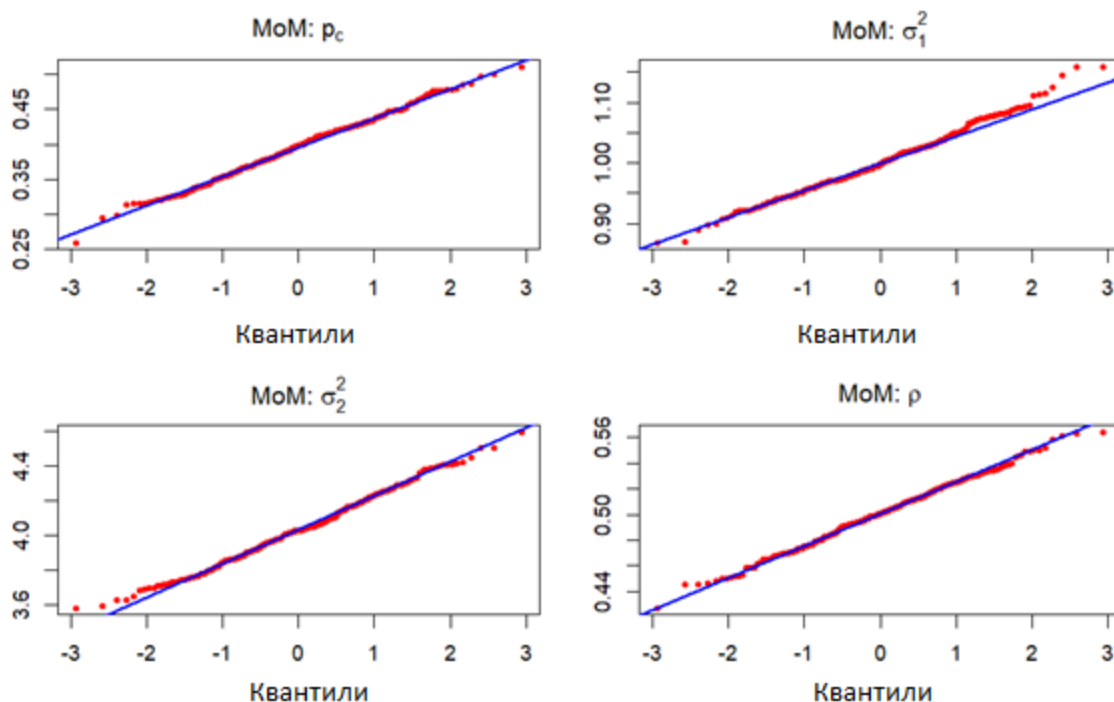
Статистика	МоМ				ECF			
	p_c	σ_1^2	σ_2^2	ρ	p_c	σ_1^2	σ_2^2	ρ
Min	0,0794	0,7787	3,2927	0,3459	0,1409	0,8423	3,3609	0,3657
Ср. вред.	0,3984	1,0102	3,9947	0,4959	0,3953	1,0056	3,9953	0,4988
Max	0,6012	1,2533	4,8995	0,6066	0,5941	1,2592	4,8769	0,6025
Bias	0,0017	0,0102	-0,0053	-0,0041	-0,0014	0,0056	-0,0047	-0,0012
SD	0,0722	0,1018	0,3350	0,0464	0,0884	0,0876	0,2995	0,0438
MSE	0,0720	0,1019	0,3339	0,0466	0,0884	0,0875	0,2986	0,0437
SW	0,978*	0,991	0,984	0,991	0,991	0,997	0,988	0,992
(p -вредност)	(0,016)	(0,478)	(0,074)	(0,497)	(0,505)	(0,983)	(0,214)	(0,536)
AD	0,699	0,456	0,468	0,462	0,526	0,186	0,375	0,452
(p -вредност)	(0,067)	(0,263)	(0,247)	(0,254)	(0,178)	(0,904)	(0,410)	(0,270)
JB	5,984	1,186	2,454	1,632	0,433	0,313	2,271	2,047
(p -вредност)	(0,050)	(0,553)	(0,293)	(0,442)	(0,805)	(0,855)	(0,321)	(0,359)

* $p < 0,05$

*Табела 5-4. Резултати дескриптивне статистике и AN тестирања процењених вредности параметара.
(Дужина серије је $T = 1500$, а стварне вредности параметара су исте као у табелама 5-2 и 5-3.)*

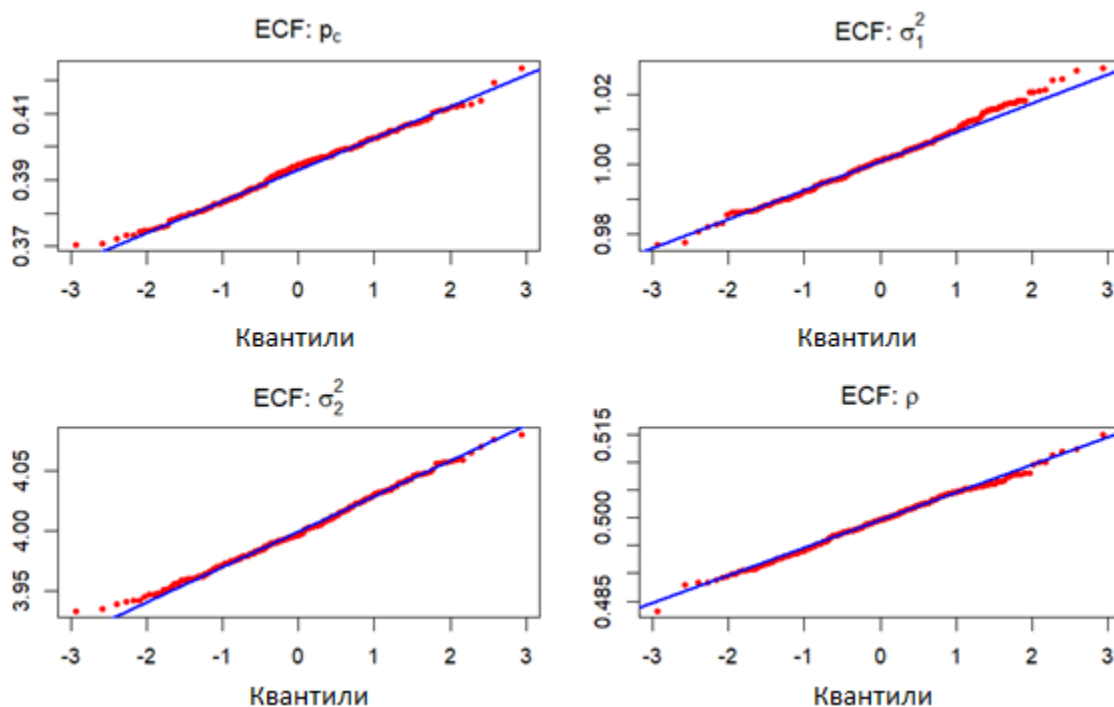
Статистика	МоМ				ECF			
	p_c	σ_1^2	σ_2^2	ρ	p_c	σ_1^2	σ_2^2	ρ
Min	0,2588	0,8597	3,5807	0,4272	0,2806	0,8698	3,6226	0,4376
Ср. вред.	0,3984	1,0051	4,0355	0,5010	0,3969	1,0047	4,0264	0,5006
Max	0,4968	1,1618	4,5975	0,5644	0,5454	1,1595	4,5100	0,5575
Bias	0,0017	0,0051	0,0355	0,0010	0,0002	0,0047	0,0264	0,0006
SD	0,0471	0,0529	0,1983	0,0240	0,0418	0,0504	0,1775	0,0235
MSE	0,0469	0,0529	0,2008	0,0239	0,0418	0,0504	0,1789	0,0234
SW	0,997	0,992	0,994	0,997	0,994	0,995	0,994	0,997
(p -вредност)	(0,784)	(0,111)	(0,326)	(0,854)	(0,224)	(0,359)	(0,335)	(0,755)
AD	0,315	0,627	0,415	0,215	0,722	0,445	0,404	0,329
(p -вредност)	(0,542)	(0,101)	(0,333)	(0,846)	(0,059)	(0,282)	(0,354)	(0,514)
JB	0,476	5,018	2,232	0,469	0,549	2,434	2,823	0,300
(p -вредност)	(0,788)	(0,081)	(0,328)	(0,791)	(0,760)	(0,296)	(0,244)	(0,861)

Притом, МоМ поступак је рачунски једноставан и посебно погодан за брзу, прелиминарну оцену или велике скупове података, због затвореног облика своје структуре. Насупрот томе, приступ заснован на емпиријским карактеристичним функцијама подразумева сложенији процес рачунања, али показује јача својства асимптотске ефикасности. Наиме, резултати приказани у табелама 5-2, 5-3 и 5-4 сугеришу да примена методе оцењивања засноване на карактеристичним функцијама достиже нешто нижу дисперзију и средњу квадратну грешку. Такође, треба напоменути да се у практичној имплементацији параметар прага c може одредити или путем његовог узајамно једнозначног односа са p_c или путем калибрације иновационе норме засноване на квантилима. Најзад, важно је напоменути да иако је 2D-GSB модел изведен под претпоставкама Гаусове иновације, његова структура заснована на мешовитом приступу пружа степен робусности до умерених одступања од нормалности, што се огледа у емпиријској примени. Као илустрација, слике 5-6 и 5-7 приказују Q–Q графиконе емпиријских расподела процењених параметара у односу на одговарајуће Гаусове квантиле за обим узорка $n = 1500$.



Слика 5-6. Q–Q приказ емпиријских расподела МоМ оцена $\hat{p}_c$, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$, и $\hat{\rho}$, добијених из $S = 300$ Монте Карло репликације 2D-GSB процеса са величином узорка $n = 1500$.

Графикони указују на асимптотску нормалност обе процедуре оцењивања и указују на то да је ова особина нешто боље изражена оцена добијених методом емпиријских карактеристичних функцијама. На овај начин, добијени графички прикази јесу у потпуном складу са теоријским асимптотским резултатима, као и са поређењима варијансе и средње-квadratне грешке датим у табелама 5-2, 5-3 и 5-4. Генерално, резултати примене Монте Карло студије потврђују горе поменута теоријска својства оцена параметара 2D-GSB модела и пружају могућност њихове применљивости у практичној, мултиваријантној анализи временских серија.



Слика 5-7. Q–Q приказ емпиријске расподеле ECF оцене $\hat{p}_c$, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$, и $\hat{\rho}$, засновано на $S = 300$ Монте Карло репликације са величином узорка $n = 1500$.

5.1.4.2 Примена 2D-GSB модела: Студија случаја за динамику криминалитета

Након што смо утврдили асимптотска својства предложених оцена над коначним узорцима путем Монте Карло симулација, у овом одељку се разматра емпиријска примена 2D-GSB модела. Да бисмо илустровали практичне перформансе предложеног модела, примењујемо га на реалне мултиваријантне временске серије које представљају учесталости специфичних кривичних дела почињених на територији Републике Србије. Као

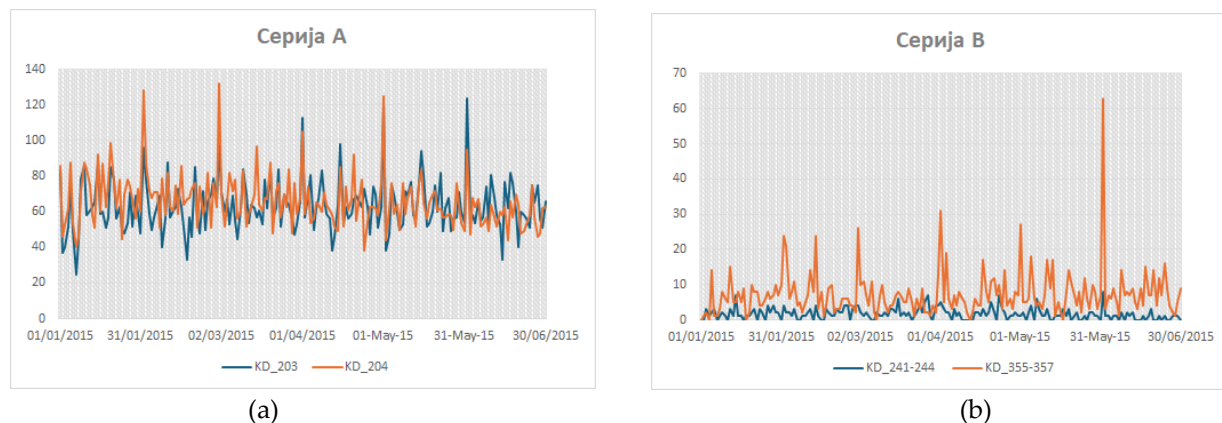
што је већ раније речено, подаци су посматрани на дневном нивоу, почев од 01. јануара 2015. године и закључно са 31. децембром 2024. године, што је резултирало временским серијама дужине $T = 3653$. Треба напоменути да је свака од посматраних серија добијена и класификована према званичном Кривичном законнику Републике Србије (шифра KD_xxx), где биваријантне серије садрже податке о повезаним кривичним активностима као своје компоненте. На овај начин, посматрају се две биваријантне серије, означене као Серија А и Серија В, чије су компоненте следеће:

A1: Крађа (шифра KD_203).

A2: Тешка крађа (шифра KD_204).

B1: Фалсификовање новца, хартија од вредности, фалсификовање и злоупотреба платних картица (шифра KD_241-244).

B2: Фалсификовање докумената и други посебни случајеви фалсификовања докумената (шифре KD_355-357).



Слика 5-8. Динамика учесталости два типа КД крађа (а) и фалсификовања (б) у посматраном узорку.

Динамика обе биваријантне временске серије је илустрована на слици 5-8, где су јасно видљиве изражене флукуације, тј. изненадни „скокови“ у броју почињених кривичних дела. Истовремено, већ на први поглед је приметна интеркорелација између компоненти обе биваријантне серије. Стога је употреба синхронизованог механизма прага посебно погодна у овом контексту, јер спољни утицаји (нпр. промене политика, економски поремећаји или мере спровођења закона) могу истовремено утицати на повезане категорије криминала. На тај начин, индикатор заједничког режима пружа природно тумачење координисаних скокова и структурних помака примећених у подацима.

У том контексту, дескриптивна статистика приказана у табели 5-5 открива изражену прекомерну дисперзију обе серије (посебно серије А), као и наглашене екстремне вредности, што се огледа у веома високој асиметрији и спљоштености у серији В. Поред тога, просечна вредност КД фалсификовања докумената (компонента В2) је приближно 7,3 дневно, али распон варира од само 0 до чак 304 таквих дела дневно. Уз значајну унакрсну зависност (интеркорелацију) између компоненти посматраних серија, све ове карактеристике указују на потребу за коришћењем стохастичког оквира заснованог на латентном режиму, уместо стандардних бројачких модела. Такође, за разлику од униваријантних приступа, дводимензионални GSB оквир омогућава заједничко моделовање повезаних категорија криминала, док експлицитно узима у обзир унакрсну зависност у њиховој екстремној динамици.

Табела 5-5. Основна статистика везана за серије А и В у посматраном узорку.

Статистика	A ₁	A ₂	B ₁	B ₂
Min	3	4	0	0
Средња вредност	47,13	35,14	1,677	7,306
Медијана	46	31	1	6
Мод	44	23	0	6
Max	152	162	87	304
SD	14,32	17,02	2,837	9,423
Коеф. асиметрије	1,366	1,319	11,37	16,14
Коеф. спљоштености	5,634	3,109	268,0	399,8
Интервал варијације	149	158	87	304
Корелација	0,6566		0,3391	

Пошто оригиналне серије представљају број КД и показују изражену хетерогеност и асиметрију, пре моделовања се примењује логаритамска трансформација опсервираних вредности. Ова трансформација не само да стабилизује варијансу и смањује асиметрију, већ и олакшава ближу апроксимацију процеса прираштаја Гаусовом мешовитом расподелом, као што је претпостављено у 2D-GSB моделу. Сходно томе, трансформисане серије прираштаја су конзистентније са основном дистрибутивном структуром модела. Из ових разлога, као основне биваријантне серије ($Y_{A,t}$) и ($Y_{B,t}$), посматране су реализације тзв. log-волумена (енг. *log-volumes*), тј. логаритамованих вредности серија А и В, добијених на следећи начин:

$$Y_{A,t}^{(i)} := \ln(A_{i,t}), \quad Y_{B,t}^{(i)} := \ln(1 + B_{i,t}), \quad i = 0, 1. \quad (5.47)$$

Као што је познато (So, Chen, Chiang, & Lin, 2007; Enow, 2005), главни циљ ових трансформација је добијање равномернијих вредности обе серије, док ће на основу особине раста логаритамске функције остати исти нагласак на флуктуацијама добијених серија. Додатно, треба напоменути да за разлику од серије $\mathbf{Y}_{A,t} = (Y_{A,t}^{(1)}, Y_{A,t}^{(2)})^\top$, која представља уобичајену log-трансформацију, серија $\mathbf{Y}_{B,t} = (Y_{B,t}^{(1)}, Y_{B,t}^{(2)})^\top$ је тзв. трансляторна log-трансформација, као последица једнакости $\min(B_1) = \min(B_2) = 0$. На тај начин, из неједнакости $A \geq 1$ и $B \geq 0$, следи да су обе серије ненегативне ($\mathbf{Y}_{A,t}, \mathbf{Y}_{B,t} \geq 0$).

Даље, користећи log-волумене као основне биваријантне низове, оцењује се векторски параметар локације $\boldsymbol{\mu}$, и то применом оба поступка описана у одељку 5.1.3.3. Детаљније, μ -оцене се добијају применом једначина (5.45) и (5.46), које одговарају, респективно, узорачкој и пондерисаној аритметичкој средини биваријантних серија $(\mathbf{Y}_{A,t}), (\mathbf{Y}_{B,t})$. Након тога се, коришћењем једначина (5.11) и (5.12), одређују серије прираштаја $(\mathbf{X}_{A,t})$ и $(\mathbf{X}_{B,t})$. На основу њих се затим процењују преостали параметри, приказани у вектору $\boldsymbol{\theta}$, укључујући вероватноћу прекорачења прага p_c и елементе коваријационе матрице Σ . У ту сврху, спроводи се поступак представљен у одељку 5.1.3.2, тачније, користи се метод момената (МоМ) и емпиријских карактеристичних функција (ECF), чиме се обезбеђује конзистентност са претходно развијеним теоријским оквиром. Добијене оцене приказане у табели 5-6 показују стабилност и интерпретабилност, што омогућава даљу теоријску анализу различитих категорија криминала.

Табела 5-6. Процењене вредности параметара 2D-GSB процеса.

$\boldsymbol{\mu}$ – оцена	$\mathbf{Y}_{A,t}^{(1)}$	$\mathbf{Y}_{A,t}^{(2)}$	$\mathbf{Y}_{B,t}^{(1)}$	$\mathbf{Y}_{B,t}^{(2)}$
$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n$	3,808	3,450	0,7368	1,903
$\hat{\boldsymbol{\mu}}_n$	3,946	3,789	0,6741	1,949
$\boldsymbol{\theta}$ – оцена	МоМ	ECF	МоМ	ECF
$\hat{p}_c$	0,1290	0,1296	0,1345	0,1626
$\hat{c}$	0,2574	0,2320	1,467	1,322
$\hat{\sigma}_1^2$	0,0566	0,0589	0,3875	0,3445
$\hat{\sigma}_2^2$	0,0680	0,0857	0,8426	0,8357
$\hat{\rho}$	0,3698	0,3618	0,1478	0,1707

Прецизније, вредности оцена параметара вектора μ указују на систематске разлике у просечним стопама раста одговарајућих категорија КД у посматраном узорку. Истовремено, оцењене вредности параметара у вектору θ указују на значајну варијабилност и унакрсну зависност, што оправдава употребу мултиваријантног модела заснованог на предложеном праговом режиму. Треба напоменути да величине оцењених параметара остају стабилне и интерпретабилне у различитим методама оцењивања, што подржава адекватност предложеног оквира закључивања. Наиме, релативно мале разлике између МоМ и ECF оцена остају у упоредивом распону и не мењају укупно структурно тумачење.

Са аспекта интерпретације, оцењени параметри пружају додатни увид у структурну динамику анализираних категорија криминала. За Серију А (крађа и тешка крађа), процењена вероватноћа $\hat{p}_c \approx 0,13$ сугерише да се наглашене флукуације код ове серије јављају у отприлике 13% посматрања. Ово указује на очекиване, али не и доминантне структурне флукуације, које истовремено утичу на обе врсте кривичних дела. Слично, за Серију В (кривична дела повезана са фалсификовањем), процењене вероватноће се крећу између 0,13 и 0,16, што такође имплицира упоредиву учесталост координисаних поремећаја у динамици ове две серије. Међутим, знатно виши процењени праг $\hat{c}$ (приближно 1,3–1,5 код Серије В, у поређењу са 0,23–0,26 у Серији А) указује да су потребне израженије величине иновација да би се покренула активација режима у делима везаним за кривична дела повезана са фалсификовањем. Ово сугерише да, иако се синхронизоване промене дешавају са сличном учесталосту у обе серије криминалних активности, интензитет шокова неопходних за активирање таквих промена се разликује, што одражава потенцијално различите структурне обрасце унутар ове две категорије кривичних дела.

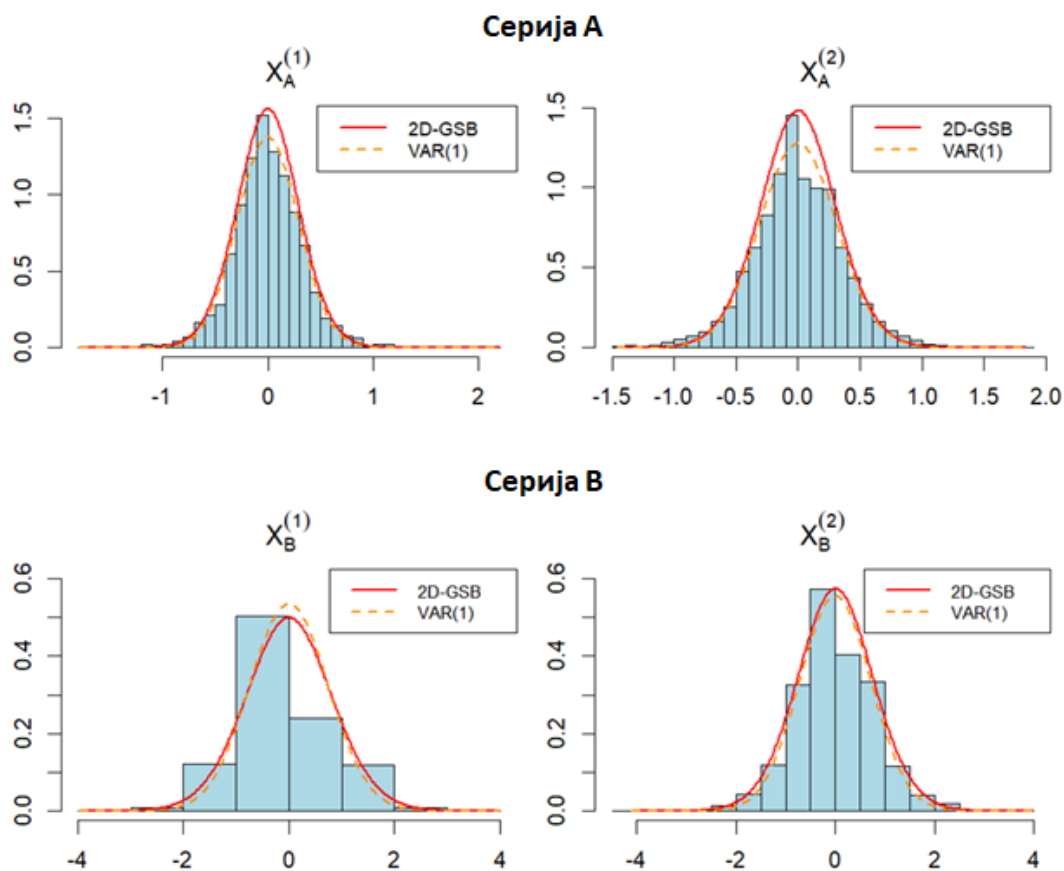
Да бисмо даље оценили емпиријску адекватност предложеног 2D-GSB модела, упоредићемо његову ефикасност са стандардним референтним показатељем векторске ауторегресије првог реда (VAR(1)) чије су оцењене вредности параметара такође израчунате над стационарним инкрементним серијама $(X_{A,t})$ и $(X_{B,t})$. Табела 5-7 приказује вредности логаритмоване веродостојности (LogLik), Акаикеовог и Бајесовог информационог критеријума (AIC и BIC), заједно са заједничком средњом квадратном грешком оценом (RMSE) за оба модела и обе биваријантне временске серије.

Табела 5-7. Вредности оцене параметара 2D-GSB модела.

Статистика	Серија А		Серија В	
	VAR(1)	2D-GSB	VAR(1)	2D-GSB
LogLik	-1.339,1	-1.154,9	-8.031,5	-7.863,4
AIC	2.692,2	2.317,8	16.077,1	15.734,7
BIC	2.735,6	2.342,6	16.120,5	15.759,5
RMSE	0,0105	$7,56 \times 10^{-3}$	0,0237	0,0209

Заједничка RMSE је дефинисана као квадратни корен аритметичке средине средње-квадратних одступања између емпиријских и прилагођених густина, чиме се обезбеђује јединствена агрегатна мера дистрибутивне прилагођености. Као што се може видети, 2D-GSB модел постиже веће вредности логаритамске веродостојности и ниже информационе критеријуме, односно мере одступања у односу на стандардну VAR(1) спецификацију. Такође, треба истаћи да предложени 2D-GSB модел укључује само четири параметра, у поређењу са седам параметара у VAR моделу. Стога се он знатно боље прилагођава емпиријским расподелама инкремената ($X_{A,t}$) и ($X_{B,t}$), посебно у случају Серије А.

Поред тога, слика 5-9 приказује емпиријске маргиналне расподеле биваријантних прираштаја заједно са фитованом Гаусовом расподелом добијеном помоћу VAR(1) модела, односно мешавином Гаусових расподела прираштаја добијених применом 2D-GSB модела. Притом је оцењивање параметара VAR(1) модела извршено коришћењем R пакета „vars” (Pfaff, 2008), док се параметри 2D-GSB модела оцењују применом МоМ процедуре за Серију А и ECF методе за Серију В, на начин који је описан у претходном одељку. Као што је приказано на слици 5-9, репрезентација у облику мешовитих гаусовских расподела, која лежи у основи прираштаја 2D-GSB модела, даја боље поклапање са емпиријским расподелама, посебно код повећане дисперзије и тзв. наглашених „репова“ (енг. *Tails*) емпиријских расподела. Насупрот томе, једно-гаусовска структура VAR(1) модела даје „потцењене“ вероватноће екстремних релација код већине фитованих модела. На тај начин, већ сам визуелни приказ степена слагања између емпиријских хистограма и фитованих густина указује на адекватност 2D-GSB оквира за моделовање синхронизоване динамике режима у посматраним подацима.



Слика 5-9. Емпиријска расподела стационарне серије прираштаја (приказане хистограмом) заједно са одговарајућим функцијама густине расподеле добијене применом VAR(1) и 2D-GSB модела (приказани линијама).

У наставку, извршено је уклапање (фитовање) емпиријских расподела основних, оригиналних Серија А и Серија В. У том циљу, приметимо најпре да се због различитих трансформација у једначини (5.47), одговарајуће расподеле ових серија значајно разликују. Док Серија А представља мешавину биваријантних log-нормалних расподела, Серију В карактерише мешавина „транслаторних“ биваријантних log-нормалних расподела. У оба случаја, Јакобијан инверзне трансформације игра кључну улогу, обезбеђујући правилно мапирање из латентне расподеле Гаусових мешавина ка оригиналним вредностима броја опсервираних КД. На тај начин, фитоване расподеле оригиналних серија посматраних КД добијају се експлицитним поступком смене променљивих на основу трансформација дефинисаних у једначини (5.47).

Прецизније, нека $\mathbf{Y}_t \in \{\mathbf{Y}_{A,t}, \mathbf{Y}_{B,t}\}$ означава било који од латентних процеса датих једначином (5.47). На основу теоријских резултата у одељку 5.1.2, расподела векторске серије $(\mathbf{Y}_t)$ представља дискретну мешавину биваријантних Гаусових расподела:

$$f_{Y_t}(\mathbf{y}) = \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} p^k (1-p)^{t-k} \phi_Y(\mathbf{y}; \mathbf{0}, (t+k)\Sigma),$$

где је $\phi_Y(\mathbf{y}; \mathbf{0}, (t+k)\Sigma)$ функција густине биваријантне Гаусове расподеле $\mathcal{N}(\mathbf{0}, (t+k)\Sigma)$.

Тада, за Серију А, инверзна трансформација $\mathbf{A}_t = \exp(\mathbf{Y}_{A,t})$ даје густину:

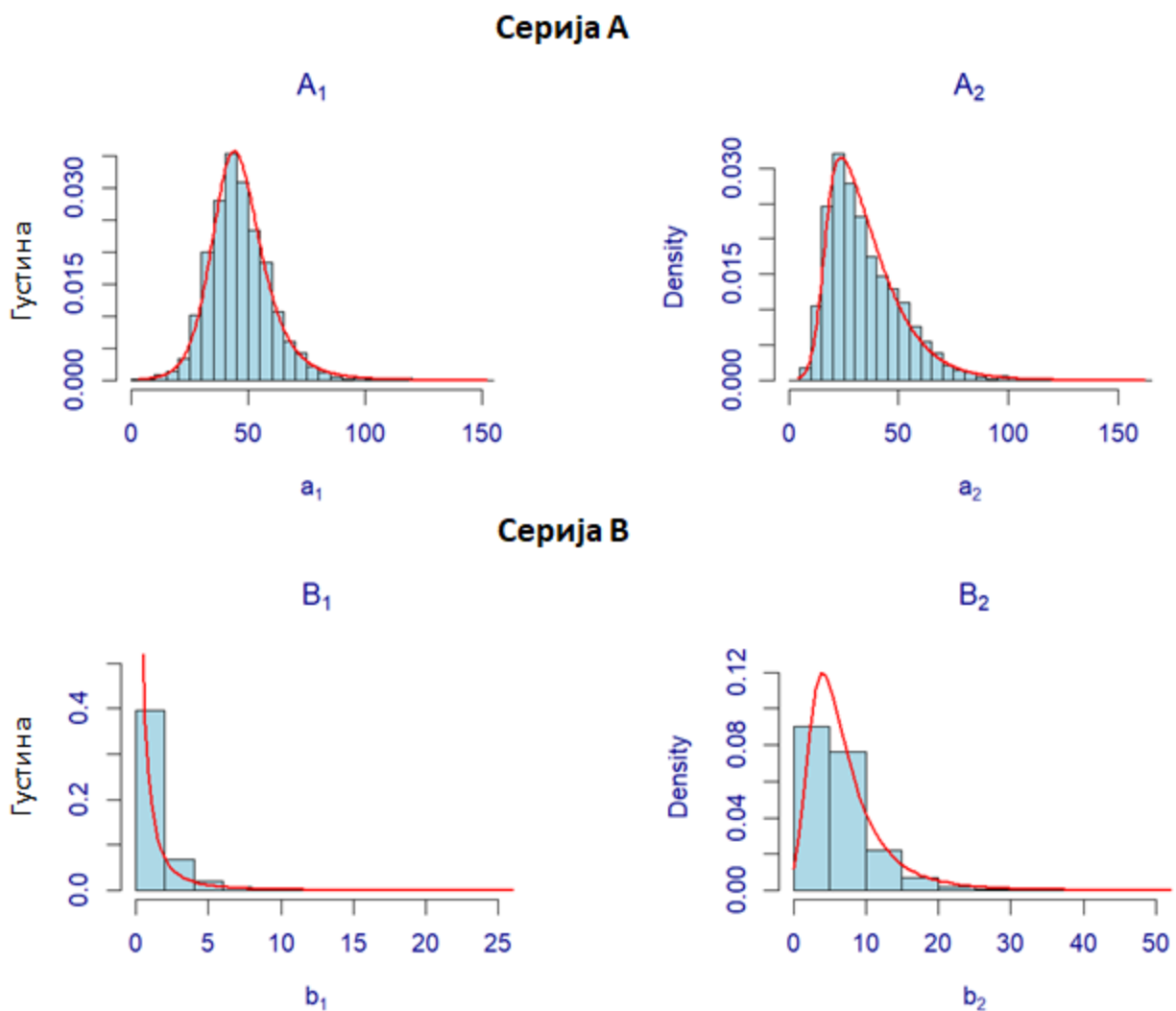
$$f_{A_t}(\mathbf{a}) = f_{Y_{A,t}}(\ln \mathbf{a}) \left| \det \frac{\partial \ln \mathbf{a}}{\partial \mathbf{a}} \right| = \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} p^k (1-p)^{t-k} \frac{\phi_Y(\ln \mathbf{a}; \mathbf{0}, (t+k)\Sigma_A)}{a_1 a_2},$$

где је $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^\top > \mathbf{0}$. На сличан начин, за Серију В, коришћењем инверзне трансформације $\mathbf{B}_t = \exp(\mathbf{Y}_{B,t}) - 1$, резултујућа густина је дата изразом:

$$\begin{aligned} f_{B_t}(\mathbf{b}) &= f_{Y_{B,t}}(\ln(\mathbf{b} + 1)) \left| \det \frac{\partial \ln(\mathbf{b} + 1)}{\partial \mathbf{b}} \right| \\ &= \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} p^k (1-p)^{t-k} \frac{\phi_Y(\ln(\mathbf{b} + 1); \mathbf{0}, (t+k)\Sigma_B)}{(1+b_1)(1+b_2)}, \end{aligned}$$

где је $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^\top \geq 0$.

На тај начин, предложени стохастички оквир индукује мешавину биваријантних log-нормалних расподела за Серију А и мешавину „транслаторно-померених“ биваријантних log-нормалних расподела за Серију В, омогућавајући везу између латентне 2D-GSB динамике и емпиријских расподела учесталости броја посматраних КД. Ипак, треба напоменути да је због нестационарност поменутих серија, које такође зависе од времена (t), потребно применити посебне, додатне нумеричке поступке за израчунавање њихових функција густине, односно расподела вероватноћа у целини. У ту сврху, овде се користи R пакет "distr" (Ruckdeschel, Kohl, Stabla, & F., 2006), док су резултати примењеног поступка приказани на слици 5-10.



Слика 5-10. Емпиријске расподеле података о динамици посматраних КД (хистограми) и њима одговарајуће функције густине вероватноће (линије), добијене помоћу 2D-GSB модела и предложене естимационог процедуре.

Као што се може видети, слика 5-10 приказује емпиријске расподеле оригиналних података, односно учесталост опсервираних КД заједно са одговарајућим теоријским функцијама густине вероватноће добијеним путем инверзно-логаритамских мешовитих репрезентација које произилазе из 2D-GSB модела. За Серију А (КД повезана са крајом), одговарајуће log-нормалне мешовите репрезентације које адекватно „хватају“ и централни део и изражене „репове“ емпиријских расподела, што указује да предложени модел адекватно одражава варијабилност и интермитентност унутар података. Слично томе, за Серију В (кривична дела повезана са фалсификовањем), „померене“ log-нормалне

мешовите репрезентације пружају задовољавајућу апроксимацију веома асиметричних емпиријских расподела, посебно у региону нижег броја и постепеног опадања десних „репова“ расподела. Генерално, слагање између емпиријских хистограма и њима одговарајућих густина потврђује да се структура мешовитих расподела изведена из латентне 2D-GSB динамике ефикасно преводи на ниво учесталости посматраних криминалних активности. Конкретно, екстремне вредности броја КД се природно објашњавају као реализације генерисане у режиму високе варијансе, без потребе за додатним „ad hoc“ претпоставкама о самој расподели.

5.2 QNHU-PAR МОДЕЛ ДИНАМИКЕ СПЕЦИФИЧНИХ ОБЛИКА КРИМИНАЛИТЕТА

Као што је већ речено на почетку овог поглавља, овде се такође разматра још један стохастичко-динамички модел динамике криминалитета, заснован на тзв. *јединичним расподелама вероватноћа и пропорционалним ауторегресивним (PAR) моделима*. Претпоставке новог модела су такође поткрепљене анализом просторно-временских података о криминалним активностима које захтевају примену метода форензичко-инжењерских анализа, а посебно усмерено на што ефикаснију идентификацију починилаца КД са елементима насиља, као и КД угрожавања сигурности у Републици Србији. На тај начин сматра се да ће очекивани резултати такође могу представљати значајан допринос у организацији рада форензичких стручних служби.

Примењен модел описује пропорционалне податке, који се типично моделују тзв. *јединичним расподелама вероватноћа*, које су дефинисане на интервалу $(0,1)$. Оне се првенствено користе као стохастички модели који могу да опишу такозване пропорционалне случајне променљиве и представљају теоријске моделе који могу да се користе за анализу и објашњење понашања неких феномена из стварног света (Bakouch, H. и сар., 2023; Hassan, Abdalla, Faal, & Saudi, 2025; Ullrich, 2021; Nasiru, Chesneau, & Ocloo, 2024). Коришћење јединичних расподела разликује се од других стохастичких поступака, пре свега због ограничења да се подаци налазе унутар интервала $(0,1)$. Полазећи од претпоставке да се динамички однос различитих, специфичних облика криминалитета у односу на општу стопу криминалних активности може управо описати таквим, јединичним расподелама, овде је истражена је могућност формирања PAR модела, заснованог на

примени неких од новијих резултата везаних за јединичне расподеле (Chesneau, 2024; Bakouch, H. и сар., 2023).

Истовремено, истакнимо да предложени модел представља природан наставак дистрибуционог оквира представљеног у раду (Стојановић, В.С. и сар., 2025b), где је предложена нова, тзв. јединична квази-Линдлијева полулогистичка (енг. *Quasi-Lindley Half-Logistic Unit* — *QHU*) расподела. QHU расподела је уведена као флексибилна двопараметарска фамилија расподела на јединичном интервалу, добијена полулогистичком трансформацијом квази-Линдлијеве расподеле. Једна од њених главних предности огледа се у способности да опише и растуће и унимодалне облике густине, уз могућност моделовања позитивне и негативне асиметрије, при чему задржава аналитички једноставне затворене облике функције густине вероватноће и функције расподеле. Ове карактеристике чине QHU расподелу нарочито погодном за моделовање хетерогених стохастичких појава ограничених на одређени интервал.

Ползаћеи од QHU расподеле као дистрибуционог оквира, овде се предложи нови PAR процес првог реда, скраћено QHU–PAR(1) процес, који комбинује флексибилност QHU расподеле са механизмом ауторегресивне зависности, уз очување ограничености вредности домена процеса. Прецизније речено, реализације процеса се генеришу као конвексна комбинација претходног стања процеса и иновационе компоненте која прати QHU расподелу, чиме се уводи временска перзистентност без нарушавања природних ограничења опсега вредности. Таква формулација посебно је пожељна у применама које укључују нормализована или релативна мерења, укључујући и показатеље криминалних појава са ограниченим скупом вредности.

За разлику од више постојећих спецификација ограничених ауторегресивних модела, предложени модел поседује експлицитно дефинисану условну расподелу и прелазну густину, што омогућава егзактно условно закључивање засновано на функцији веродостојности и олакшава вероватносну интерпретацију. Поред тога, модел природно обухвата различите дистрибуционе облике наслеђене од основних QHU иновација, чиме пружа додатну флексибилност у односу на стандардне приступе засноване на стандардним расподелама, попут бета и Кумарасвамијеве расподеле (Rocha, A.V.; Cribari-Neto, F., 2009; Bayer, F.M.; Bayer, D.M.; Pumi, G., 2017). Конкретно, QHU–PAR(1) процес као основну вероватносну структуру укључује Марковљеву зависност, уз значајну флексибилност коју

обезбеђује сама QHU расподела. Његова практична корисност демонстрирана је применом на временске серије које представљају пропорционални удео одређених КД у односу на укупан број почињених дела.

5.2.1 Дефиниција и основне особине QHU-PAR(1) процеса

Овде најпре представљамо временску зависност предложеног модела путем конвексне ауторегресивне структуре, при чему иновациона компонента прати QHU расподелу. Након тога представљају се и анализирају се нека од најважнијих стохастичких својстава предложеног модела. У ту сврху, нека је (ε_t) серија независних и идентично расподељених (IID) случајних променљивих таквих да је $\varepsilon_t \sim \text{QHU}(\lambda, \theta)$, тј. њихова одговарајућа функција густине вероватноће (енг. *Probability Distribution Function – PDF*) је дата са:

$$f_{\text{QHU}}(x; \lambda, \theta) = \frac{2\lambda x}{\theta + 1} (1 - x^2)^{\lambda-1} [\theta - \lambda \ln(1 - x^2)], \quad x \in (0,1), \quad (5.48)$$

где су $\lambda, \theta > 0$ непознати параметри. Као што је показано у (Стојановић, В.С. и сар., 2025b), кумулативна функција расподеле (енг. *Cumulative Distribution Function – CDF*) QHU расподеле се једноставно добија парцијалном интеграцијом њене густине:

$$\begin{aligned} F_{\text{QHU}}(x; \lambda, \theta) &= P(\varepsilon_t < x) = \int_0^x f_{\text{QHU}}(t; \lambda, \theta) dt \\ &= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \frac{(1 - x^2)^\lambda (\theta + 1 - \lambda \ln(1 - x^2))}{\theta + 1}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.49)$$

У наставку, формално дефинишемо предложени стохастички процес.

Дефиниција 5.1. Нека је $0 < \rho < 1$ и (ε_t) , $t = 0, 1, 2, \dots$ IID серија QHU-расподељених случајних променљивих чија је функција густине дата једнакошћу (5.49). Стохастички процес (Z_t) се назива QHU парцијални ауторегресивни процес првог реда, скраћено QHU-PAR(1) процес, ако задовољава стохастичку рекурзију:

$$Z_t = \rho Z_{t-1} + (1 - \rho)\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (5.50)$$

Треба напоменути да се предложена конструкција може тумачити као конвексна комбинација две компоненте: претходног стања Z_{t-1} , које садржи тзв. временску меморију,

и новогенерисане стохастичке иновације ε_t , која представља случајну структурну пертурбацију. Сходно томе, неједнакост $0 < Z_t < 1$ важи за произвољно $t \in \mathbb{Z}$ и сам модел обухвата, како перзистентност (постојаност у времену), тако и стохастичку варијабилност, уз очување ограничености домена процеса на јединичном $(0,1)$ интервалу. Коначно, параметар ρ контролише степен временске перзистентности на следећи начин:

- када $\rho \rightarrow 0$, процес се приближава низу независних QHU иновација (ε_t) ;
- када $\rho \rightarrow 1$, утицај прошлих реализација доминира, што производи јаку серијску зависност.

На тај начин, параметар ρ се природно интерпретира као *коэффициент перзистенције*, који контролише брзину временске адаптације самог процеса.

5.2.1.1 Структурна и дистрибутивна својства

QHU–PAR(1) процес поседује низ својстава која директно следе из његове ауторегресивне конструкције. Ова својства су представљена наредним тврђењима.

Теорема 5.9 (Структурна карактеризација). *Нека је процес (Z_t) дефинисан једнакошћу (5.50), где је $t \in \mathbb{Z}$ and (ε_t) IID серија QHU расподељених случајних променљивих. Тада, (Z_t) представља временски хомоген и строго стационаран Марковљев ланац који скоро сигурно (s.s.) задовољава стационарну репрезентацију:*

$$Z_t = (1 - \rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j}. \quad (5.51)$$

Доказ. Према једначини (5.50), за свако $t \in \mathbb{Z}$, случајна променљива Z_t зависи од свог претходног стања Z_{t-1} и иновације ε_t која је независна од историје процеса. Стога, за било који мерљиви скуп $A \subseteq (0,1)$, важи:

$$P(Z_t \in A \mid Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_0) = P(Z_t \in A \mid Z_{t-1}),$$

што утврђује Марковљево својство низа (Z_t) . Пошто механизам транзиције не зависи експлицитно од времена t , процес је временски хомоген.

Даље, рекурзивном заменом у једнакост (5.50), за било које $j = 0, 1, 2, \dots$, добија се:

$$Z_t = \rho^t Z_{t-j-1} + (1 - \rho) \sum_{j=0}^{t-j} \rho^j \varepsilon_{t-j}.$$

Како је $0 < \rho < 1$ и $Z_{t-j-1} \in (0,1)$, допринос случајне променљиве Z_{t-j-1} нестаје када је $t \rightarrow \infty$, тј. важи:

$$\rho^t Z_{t-j-1} \xrightarrow{s.s.} 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Притом, из неједнакости $0 < \varepsilon_t < 1$ следи:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j} < (1 - \rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = 1,$$

тј. горе наведена бесконачна сума је скоро сигурно апсолутно ограничена конвергентним геометријским редом. Стога, важи следећа скоро сигурна конвергенција:

$$Z_t \rightarrow (1 - \rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j}, \quad t \rightarrow \infty,$$

што потврђује једнакост (5.51). Штавише, пошто су иновације (ε_t) међусобно независне и строго стационарне, за било које $n, h \geq 1$ важи следећа једнакост (у расподели):

$$(Z_t^*, \dots, Z_{t+h-1}^*) = (Z_{t+n}^*, \dots, Z_{t+n+h-1}^*).$$

Ово доказује строгу стационарност процеса (Z_t) . $\square$

Напомена 5.8. Репрезентација дата једнакошћу (5.51) показује да се QНУ–PAR(1) процес може тумачити као експоненцијално пондерисана сума претходних QНУ иновација. Сходно томе, многе дистрибутивне карактеристике дистрибуције иновација, укључујући стохастичке односе уређења и својства асиметрије, наслеђује резултујући процес (видети део 5.2.1.3).

Важна предност предложеног процеса лежи у постојању експлицитних условних и прелазних (транзиционих) дистрибуција. Ове величине играју централну улогу у стохастичкој анализи QНУ–PAR(1) процеса и пружају основу за њгову даљу примену. Следећи резултат описује условну расподелу предложеног модела.

Теорема 5.10 (Условна расподела). Нека $F_{QHU}(x; \lambda, \theta)$ представља CDF иновација (ε_t), датих једнакошћу (5.49). Тада, за било које $z \in (0, 1)$, условна CDF серије (Z_t) је дата изразом:

$$F_{Z_t|Z_{t-1}}(y | z) = \begin{cases} 0, & y \leq \rho z \\ F_{QHU}\left(\frac{y - \rho z}{1 - \rho}; \lambda, \theta\right), & \rho z < y \leq \rho z + 1 - \rho \\ 1, & y > \rho z + 1 - \rho. \end{cases} \quad (5.52)$$

Поред тога, условна густина QHU-PAR(1) процеса (Z_t) дата је следећим изразом:

$$f(y | z) = \frac{1}{1 - \rho} f_{QHU}\left(\frac{y - \rho z}{1 - \rho}; \lambda, \theta\right) \quad (5.53)$$

где је $y \in (\rho z, \rho z + 1 - \rho)$.

Доказ. Условљавањем са $Z_{t-1} = z$, рекурзија процеса (Z_t), дата једнакошћу (5.50), постаје:

$$Z_t = \rho z + (1 - \rho)\varepsilon_t.$$

Даље, пошто је $1 - \rho > 0$,

$$P(Z_t < y | Z_{t-1} = z) = P(\rho z + (1 - \rho)\varepsilon_t < y) = P\left(\varepsilon_t < \frac{y - \rho z}{1 - \rho}\right),$$

што одмах даје:

$$F_{Z_t|Z_{t-1}}(y | z) = F_{QHU}\left(\frac{y - \rho z}{1 - \rho}; \lambda, \theta\right)$$

Према $0 < \varepsilon_t < 1$, следи:

$$\rho z < Z_t < \rho z + 1 - \rho,$$

што доказује оба гранична случаја условне CDF дате једначином (5.52). Коначно, диференцирањем у односу на $y \in (\rho z, \rho z + 1 - \rho)$ добија се одговарајућа густина прелаза у једначини (5.53). $\square$

Напомена 5.9. За разлику од многих других тзв. ограничених ауторегресивних модела (енг. *Bounded Autoregressive Models*) чије су расподеле прелаза доступне само имплицитно, QHU-PAR(1) процес има експлицитну условну густину, дату једнакошћу (5.53). Ово представља важну практичну предност предложеног процеса, јер омогућава тачну оцену

његове условне вероватноће, без нумеричке интеграције или апроксимација заснованих на симулацијама, што ће даље бити детаљније размотрено у делу 5.2.2.

5.2.1.2 Моменти и својства зависности

Експлицитна ауторегресивна конструкција QNHU–PAR(1) процеса омогућава изразе затвореног облика за његове главне карактеристике, пре свега моменте, што пружа значајан увид у понашање и структуру временске зависности самог процеса. У овом делу, добијени су експлицитни изрази за условне и безусловне моменте, аутоковаријациону и аутокорелациону функцију. Штавише, утврђена је и ергодичност процеса. Најпре, истакнимо да је у (Стојановић, В.С. и сар., 2025b) показано да за сваки цео број $r \geq 1$, одговарајући r –ти момент QNHU иновација (ε_t) гласи:

$$\mu_r = E(\varepsilon_t^r) = \frac{\Gamma(r/2 + 1)\Gamma(\lambda + 1)[\theta + \lambda\Psi(r/2 + \lambda + 1) - \lambda\Psi(\lambda)]}{(\theta + 1)\Gamma\left(\frac{r}{2} + \lambda + 1\right)}, \quad (5.54)$$

где $\Gamma(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$ означавају, редом, Гама и Дигама функцију. Одавде, следи:

Теорема 5.11 (Условни моменти). *За QNHU–PAR(1) процес (Z_t), дефинисан једнакошћу (5.50), и сваки цео број $r \geq 1$, r –ти условни момент је облика:*

$$E(Z_t^r | Z_{t-1}) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \rho^{r-j} (1 - \rho)^j Z_{t-1}^{r-j} \mu_j, \quad (5.55)$$

где је момент $\mu_j = E(\varepsilon_t^j)$ дефинисан једнакошћу (5.54) и $\mu_0 = 1$.

Доказ. Степеновањем обе стране једнакости (5.50) степеном $r \geq 1$ и применом биномне формуле добија се:

$$Z_t^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \rho^{r-j} (1 - \rho)^j Z_{t-1}^{r-j} \varepsilon_t^j.$$

Узимајући условно очекивање у последњем изразу у односу на Z_{t-1} , добија се:

$$E(Z_t^r | Z_{t-1}) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \rho^{r-j} (1 - \rho)^j Z_{t-1}^{r-j} E(\varepsilon_t^j | Z_{t-1}).$$

Пошто су иновације ε_t независне од Z_{t-1} , имамо:

$$E(\varepsilon_t^j | Z_{t-1}) = E(\varepsilon_t^j) = \mu_j,$$

па заменом ове једнакости у претходни израз непосредно добијамо једнакост (5.55). Најзад, како је $\varepsilon_t \sim QHU(\lambda, \theta)$, моменти иновација су дати једнакошћу (5.54), чиме је теорема доказана у потпуности. $\square$

Последица 5.2. Условна средња вредност и варијанса $QHU-PAR(1)$ процеса су, респективно,

$$\begin{aligned} E(Z_t | Z_{t-1}) &= \rho Z_{t-1} + (1 - \rho)\mu_\varepsilon, \\ Var(Z_t | Z_{t-1}) &= (1 - \rho)^2 \sigma_\varepsilon^2, \end{aligned} \tag{5.56}$$

где је:

$$\mu_\varepsilon = E(\varepsilon_t) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + 1) \left[\theta + \lambda \Psi\left(\lambda + \frac{3}{2}\right) - \lambda \Psi(\lambda) \right]}{2(\theta + 1) \Gamma\left(\lambda + \frac{3}{2}\right)},$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = Var(\varepsilon_t) = \mu_2(\lambda, \theta) - \mu_\varepsilon^2,$$

и

$$\mu_2(\lambda, \theta) = \frac{\theta + 2 - (\lambda + 1)^{-1}}{(\theta + 1)(\lambda + 1)}.$$

Доказ. Ставивиши $r = 1$ у једнакост (5.55), имамо:

$$E(Z_t | Z_{t-1}) = E[\rho Z_{t-1} + (1 - \rho)\varepsilon_t | Z_{t-1}] = \rho Z_{t-1} + (1 - \rho)E(\varepsilon_t),$$

што даје први резултат у (5.56). Даље, када је $r = 2$,

$$E(Z_t^2 | Z_{t-1}) = \rho^2 Z_{t-1}^2 + 2\rho(1 - \rho)\mu_1 Z_{t-1} + (1 - \rho)^2 \mu_2,$$

па је стога:

$$Var(Z_t | Z_{t-1}) = Var(\rho Z_{t-1} + (1 - \rho)\varepsilon_t | Z_{t-1}) = Var((1 - \rho)\varepsilon_t).$$

Одавде, заменом једнакости (5.54), када је $r = 2$, као и након извесног израчунавања, добија се други израз у (5.56). $\square$

Напомена 5.10. Важна последица претходних резултата јесте да условна варијабилност процеса не зависи од тренутног стања процеса. Стога, за разлику од многих нелинеарних

ограничених ауторегресивних модела, предложени процес поседује хомоскедастичну условну варијансу.

Теорема 5.12 (Маргинални моменти). *Нека је QHU-PAR(1) процес (Z_t) дефинисан једнакошћу (5.50). Тада, за било које $r = 1, 2, \dots, r$ -ти момент за (Z_t) гласи:*

$$M_r = E(Z_t^r) = \frac{1}{1 - \rho^r} \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} \rho^{r-j} (1 - \rho)^j M_{r-j} \mu_j, \quad (5.57)$$

где је $M_0 = 1$ и $\mu_j = E(\varepsilon_t^j)$ означава j -ти моменат QHU иновација, дефинисаних једнакошћу (5.54).

Доказ. Полазећи од једнакости (5.55), тј. узимајући у обзир математичка очекивања са обе стране ове једнакости, добија се:

$$M_r = E(Z_t^r) = E[E(Z_t^r | Z_{t-1})] = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \rho^{r-j} (1 - \rho)^j \mu_j E(Z_{t-1}^{r-j}).$$

Као што је утврђено у Теорему 5.8, процес (Z_t) је строго стационаран, тако да важи једнакост $E(Z_{t-1}^{r-j}) = M_{r-j}$ и зато:

$$M_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \rho^{r-j} (1 - \rho)^j M_{r-j} \mu_j.$$

Одвајањем члана којем одговара вредност индекса $j = 0$, а притом узимајући у обзир да је $\mu_0 = M_0 = 1$, добија се:

$$M_r = \rho^r M_r + \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} \rho^{r-j} (1 - \rho)^j M_{r-j} \mu_j,$$

што очито даје једнакост (5.57). $\square$

Последица 5.3. *Средња вредности и варијанса QHU-PAR(1) процеса (Z_t) су, респективно,*

$$E(Z_t) = \mu_\varepsilon, \quad \text{Var}(Z_t) = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \sigma_\varepsilon^2. \quad (5.58)$$

Доказ. Према једначини (5.57), када је $r = 1$, лако се добија једнакост $M_1 = \mu_1$, која очито представља прву од једнакости (5.58). За варијансу, користећи независност Z_{t-1} и ε_t , добијамо:

$$\text{Var}(Z_t) = \rho^2 \text{Var}(Z_{t-1}) + (1 - \rho)^2 \sigma_\varepsilon^2,$$

а под условом стационарности, важи једнакост $\text{Var}(Z_t) = \text{Var}(Z_{t-1}) = \sigma_Z^2$. Одавде, након преуређивања чланова у горњој једнакости, лако се добија друга једнакост у (5.58). $\square$

Напомена 5.11. Претходни резултат указује на то да јача временска перзистентност смањује маргиналну варијабилност самог процеса. Конкретно, за фиксне иновационе параметре (λ, θ) , конвергенција:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \text{Var}(Z_t) = 0$$

подразумева „временско-дугорочну“ концентрацију QHU-PAR(1) процеса око његове средње вредности.

Теорема 5.13 (Структурна зависност). *За било које $h \in \mathbb{Z}$, аутоковаријациона и аутокорељациона функција (ACF) стационарног QHU-PAR(1) процеса (Z_t) су, респективно,*

$$\gamma(h) = \text{Cov}(Z_t, Z_{t-h}) = \rho^{|h|} \gamma(0), \quad \rho_Z(h) = \text{Corr}(Z_t, Z_{t-h}) = \rho^{|h|} \quad (5.59)$$

где је $\gamma(0) = \text{Var}(Z_t)$.

Доказ. Према једнакости (5.50), за било који цео број $h \geq 1$, аутоковаријанса (Z_t) може се записати на следећи начин:

$$\gamma(h) = \text{Cov}(\rho Z_{t-1} + (1 - \rho)\varepsilon_t, Z_{t-h}).$$

Према томе, независност Z_{t-1} и ε_t повлачи $\text{Cov}(\varepsilon_t, Z_{t-h}) = 0$, и стога:

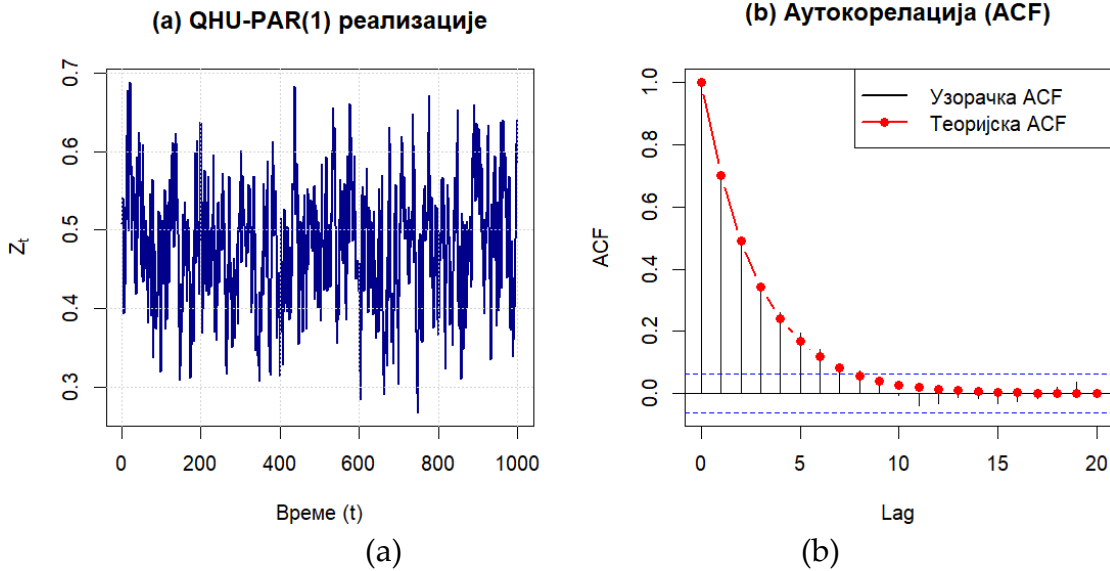
$$\gamma(h) = \rho \text{Cov}(Z_{t-1}, Z_{t-h}) = \rho \gamma(h-1).$$

Одавде се, поновљењем итерација за $h = 2, 3, \dots$ добија прву од једнакости (5.59). Сходно томе, ACF серије (Z_t) се лако добија из њене стационарности и једнакости:

$$\text{Corr}(Z_t, Z_{t-h}) = \frac{\text{Cov}(Z_t, Z_{t-h})}{\sqrt{\text{Var}(Z_t)\text{Var}(Z_{t-h})}}. \square$$

Напомена 5.12. На основу горе наведеног, треба напоменути да предложени процес задржава има исту корелациону структуру као и класични Гаусов AR(1) модел, уз

истовремено одржавање ограниченог $(0,1)$ домена и флексибилног негаусовог маргиналног понашања, као што је приказано на слици 5-11. Оваква карактеристика пружа важну практичну предност QHU-PAR(1) процеса, јер се параметар перзистенције ρ може директно оценити из емпиријске аутокорељације са кораком (енг. *Lag*) $h = 1$ (за више детаља, видети део 5.2.2).



Слика 5-11. Реализација QHU-PAR(1) процеса (a) и одговарајућа узорачка и теоријска аутокорељација (б). Вредности параметара су: $\lambda = 5, \theta = 0,5, \rho = 0,7$.

Теорема 5.14 (Геометријска ергодичност). QHU-PAR(1) процес (Z_t) , дефинисан једнакошћу (5.50), јесте геометријски ергодичан.

Доказ. Дефинишимо пресликавање $g(z, \varepsilon) = \rho z + (1 - \rho)\varepsilon$. Тада, за произвољне $z_1, z_2 \in (0,1)$, важи:

$$|g(z_1, \varepsilon) - g(z_2, \varepsilon)| = \rho|z_1 - z_2|.$$

Пошто је $0 < \rho < 1$, QHU-PAR(1) процес задовољава услов контракције. Стога, према раније познатим, стандардним резултатима за геометријски ергодичне Марковљеве ланце (видети, нпр., (Douc, Moulines, Priouret, & Soulier, 2018) или (Gallegos-Herrada, Ledvinka, & Rosenthal, 2024)), он поседује јединствену инваријантну расподелу и геометријски је ергодичан. $\square$

5.2.1.3 Наслеђена дистрибутивна својства

Додатни разлог за коришћење QНУ иновација у конструкцији одговарајућег PAR модела произилази из стохастичке структуре саме QНУ расподеле. Наиме, ова фамилија расподела дозвољава експлицитне стохастичке релације уређења у односу на оба параметра, поседује растуће и унимодалне облике густине, као и позитивну и негативну асиметрију у зависности од конфигурације самих параметара. Сва ова својства сугеришу да резултујући процес може наследити значајан степен дистрибутивне флексибилности, што га разликује од неких од постојећих ауторегресивних конструкција, заснованих на рестриктивнијим расподелама својих иновација. Сходно томе, неколико важних дистрибутивних својстава основне QНУ дистрибуције природно се преноси на сам QНУ–PAR(1) процес, о чему сведоче наредна тврђења.

Теорема 5.15 (Очување стохастичког уређења). *Нека су $(Z_t^{(1)})$ и $(Z_t^{(2)})$ два стационарна QНУ–PAR(1) процеса са QНУ иновацијама $(\varepsilon_t^{(1)}) \sim QНУ(\lambda_1, \theta_1)$ и $(\varepsilon_t^{(2)}) \sim QНУ(\lambda_2, \theta_2)$, респективно. Ако је $\lambda_1 \geq \lambda_2$ и $\theta_1 \geq \theta_2$, онда за свако $t \in \mathbb{Z}$ важи неједнакост $Z_t^{(1)} \leq_{st} Z_t^{(2)}$, где је:*

$$Z_t^{(1)} \leq_{st} Z_t^{(2)} \stackrel{\text{def}}{\iff} P(Z_t^{(1)} > z) \leq P(Z_t^{(2)} > z), \quad \forall z \in (0,1).$$

Доказ. При претпоставкама $\lambda_1 \geq \lambda_2$ и $\theta_1 \geq \theta_2$, одговарајуће иновације $(\varepsilon_t^{(i)})$ процеса $(Z_t^{(i)})$, $i = 1, 2$, задовољавају неједнакост $\varepsilon_t(1) \leq_{st} \varepsilon_t(2)$ (видети теорему 2 у (Стојановић, В.С. и сар., 2025b)). С друге стране, према теорему 5.8, важи (скоро извесна) једнакост:

$$Z_t^{(i)} = (1 - \rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j}^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

где је $(1 - \rho)\rho^j > 0$, за свако $j = 0, 1, 2, \dots$ Дакле, пресликавање:

$$(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots) \mapsto (1 - \rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j}$$

је стохастички растуће по свакој од својих координата. Стога је стохастичко уређење очувано при горњој трансформацији, што имплицира да је заиста $Z_t^{(1)} \leq_{st} Z_t^{(2)}$. $\square$

Теорема 5.16 (Очување смера асиметрије). Нека $s_\varepsilon = \text{Skew}(\varepsilon_t)$ и $s_Z = \text{Skew}(Z_t)$ означавају коефицијенте асиметрије QHU иновација и стационарног $QHU\text{--}PAR(1)$ процеса, респективно. Тада је $\text{sgn}(s_Z) = \text{sgn}(s_\varepsilon)$, тј., стационарни процес (Z_t) има исти смер асиметрије као и QHU иновације (ε_t) .

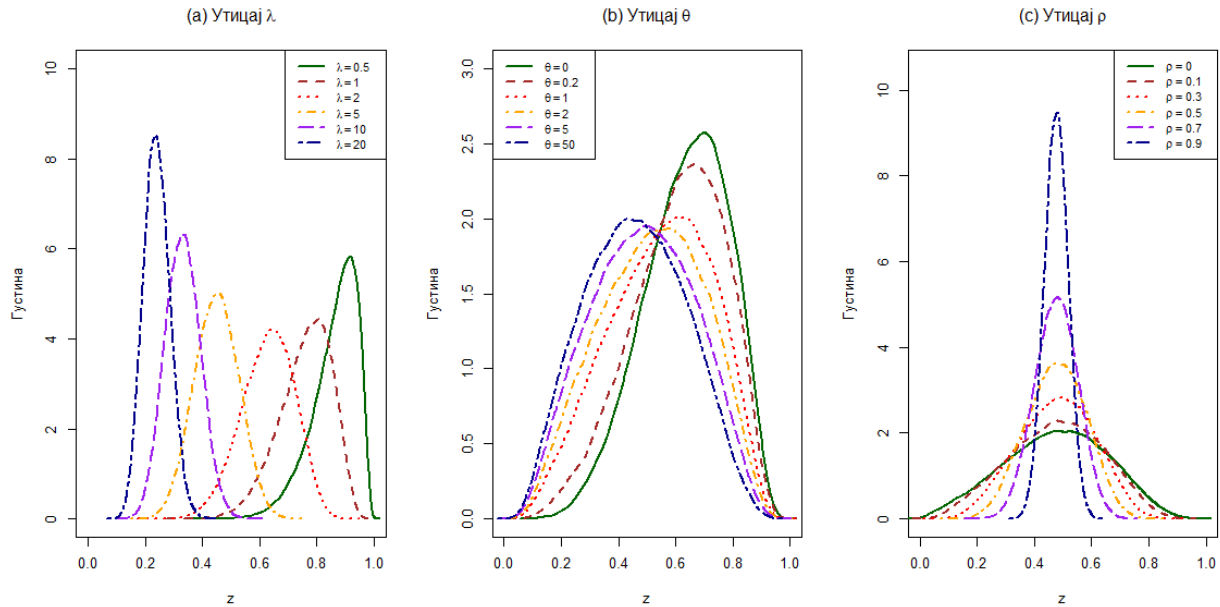
Доказ. Користећи стационарну репрезентацију серије (Z_t) , дату једнакошћу (5.51), добија се:

$$Z_t - \mu_Z = (1 - \rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j (\varepsilon_{t-j} - \mu_\varepsilon),$$

где је, према првој од једнакости (5.58), $\mu_Z = E(Z_t) = \mu_\varepsilon$. Пошто су иновације (ε_t) независне, следи:

$$E[(Z_t - \mu_Z)^3] = (1 - \rho)^3 \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{3j} E[(\varepsilon_t - \mu_\varepsilon)^3] = \frac{(1 - \rho)^3}{1 - \rho^3} E[(\varepsilon_t - \mu_\varepsilon)^3],$$

где је $(1 - \rho)^3 / (1 - \rho^3) > 0$. Дакле, трећи централни моменти случајних променљивих Z_t и ε_t имају исти знак, тако да је заиста $\text{sgn}(s_Z) = \text{sgn}(s_\varepsilon)$. $\square$



Слика 5-12. Стационарне густине $QHU\text{--}PAR(1)$ процеса за различите конфигурације параметара: (а) Утицај параметра облика λ , када је $\theta = 1, \rho = 0,7$. (б) Утицај параметра скалирања θ , за $\lambda = 3, \rho = 0,15$. (с) Улога параметра перзистенције ρ , када је $\lambda = 5, \theta = 0,5$.

Напомена 5.13. Претходно утврђени теоријски резултати указују на то да дистрибутивне карактеристике QHU иновација играју фундаменталну улогу у одређивању понашања резултујућег PAR процеса. Конкретно, теорема 5.15 показује да су стохастичка својства уређења QHU дистрибуције очувана под PAR механизмом, док теорема 5.16 показује да смер асиметрије остаје непромењен у стационарном режиму. Сходно томе, параметри λ, θ , као и код расподеле QHU иновација, имају значајан утицај на облик расподеле процеса, док параметар ρ контролише степен временске перзистенције и концентрације око средње вредности. Да би се илустровали ови ефекти, слика 5-12 приказује оцењене стационарне густине QHU–PAR(1) процеса за неколико различитих конфигурација параметара. Као што се може видети на слици, различите комбинације λ, θ, ρ генеришу значајно различите дистрибутивне обрасце што демонстрира флексибилност предложеног модела.

5.2.2 Практични аспект примене QHU–PAR(1) процеса

Практична применљивост предложеног QHU–PAR(1) процеса зависи не само од његових стохастичких својстава, већ и од могућности примене ефикасних инференцијалних процедура. Како модел комбинује ауторегресивну структуру са QHU-дистрибуираним иновацијама, оцене параметара морају истовремено узети у обзир и његову временску зависност и дистрибутивне карактеристике. У том циљу, експлицитна условна расподела изведена у претходном делу омогућава оцењивање засновано на тзв. методу максималне веродостојности (енг. *Maximum Likelihood Estimation – MLE*), док аутокорељациона структура даје могућност оцене параметра перзистенције методом условних најмањих квадрата (енг. *Conditional Least Squares – CLS*). Мотивисани овим разматрањима, овде је развијен хибридни оквир за поступак оцењивања који комбинује ова два приступа, тј. CLS оцене параметра перзистенције (ρ) са MLE оценама иновационих параметара (λ, θ). Као што ће се видети у наставку, овај приступ доводи до рачунски ефикасних процедура оцењивања уз очување њихових теоријских особина.

5.2.2.1 Хибридни поступак оцене параметара

Као што је већ поменуто, процедура оцене параметара QHU-PAR(1) процеса се изводи у две узастопне фазе. Најпре се параметар ρ се оцењује из аутокорељационе структуре самог

процеса, а након тога, параметри λ, θ се оцењују на основу добијене оцењене вредности за ρ . Таква декомпозиција је посебно погодна, јер према теореме 5.13, тј. једначини (5.59), теоријска ACF датог процеса има једноставан, геометријски опадајући облик. Ово имплицира да је $\text{Corr}(Z_t, Z_{t-1}) = \rho$, што сугерише следећу оцену параметра перзистенције ρ , а на основу аутокорелације узорка:

$$\hat{\rho} = \frac{\frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (z_t - \bar{z})(z_{t-1} - \bar{z})}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (z_t - \bar{z})^2}. \quad (5.60)$$

Притом, овде је $z_1, \dots, z_T$ нека реализација QHU-PAR(1) процеса, док је $\bar{z} = T^{-1} \sum_{t=1}^T z_t$ одговарајућа средња вредност узорка.

Након што је параметар перзистенције процењен, псеудо-иновације се могу добити трансформацијом:

$$\hat{u}_t = \frac{z_t - \hat{\rho} z_{t-1}}{1 - \hat{\rho}}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.61)$$

где је $z_0 = 0$. Треба напоменути да под стандардним условима регуларности и конзистентности за оцену $\hat{\rho}$, псеудо-иновације ($\hat{u}_t$) скоро извесно конвергирају ка правим иновацијама (ε_t). Сходно томе, оцењивање иновационих параметара (λ, θ) се асимптотски своди на примену естимационе процедуре повезане са QHU дистрибутивним оквиром. Другим речима, након налажења оцене $\hat{\rho}$, циљна функција по MLE методу јесте тзв. функција веродостојности облика:

$$L_T(\lambda, \theta \mid \hat{\rho}) = \prod_{t=1}^T f_{QHU}(\hat{u}_t; \lambda, \theta),$$

где се функција $f_{QHU}(\hat{u}_t; \lambda, \theta)$ лако добија коришћењем једнакости (5.48). На тај начин, одговарајући логаритамски облик функције веродостојности гласи:

$$\begin{aligned} \ell_T(\lambda, \theta \mid \hat{\rho}) &= \log L_T(\lambda, \theta \mid \hat{\rho}) = T \log(2\lambda) - T \log(\theta + 1) + \sum_{t=1}^T \log(\hat{u}_t) \\ &\quad + (\lambda - 1) \sum_{t=1}^T \log(1 - \hat{u}_t^2) + \sum_{t=1}^T \log[\theta - \lambda \log(1 - \hat{u}_t^2)]. \end{aligned}$$

Диференцирњем ове функције по непознатим параметрима λ, θ даје следећи систем једначина:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell_T}{\partial \lambda} = \frac{T}{\lambda} + \sum_{t=1}^T \log(1 - \hat{u}_t^2) - \sum_{t=1}^T \frac{\log(1 - \hat{u}_t^2)}{\theta - \lambda \log(1 - \hat{u}_t^2)} = 0 \\ \frac{\partial \ell_T}{\partial \theta} = -\frac{T}{\theta + 1} + \sum_{t=1}^T \frac{1}{\theta - \lambda \log(1 - \hat{u}_t^2)} = 0, \end{cases} \quad (5.62)$$

чија решења $(\hat{\lambda}, \hat{\theta})$ представљају MLE-оцене QNH-PAR(1) процеса. Треба напоменути да се једначине (5.62) структурно поклапају са онима добијеним за QNH расподелу и стога наслеђују аналогна теоријска својства. На пример, у (Стојановић, В.С. и сар., 2025b) је доказано да спрегнути систем једначина (5.62) имају бар једно решење, као и да на тај начин добијене оцене поседује својства конзистентности и асимптотске нормалности (AN). Асимптотска својства оцена $(\hat{\lambda}, \hat{\theta})$, добијених за псеудо-иновације $(\hat{u}_t)$, размотрена у следећем одељку.

5.2.2.2 Асимптотска својства добијених оцена

У претходном делу смо доказали да је QNH-PAR(1) процес строго стационаран и геометријски ергодичан, тако да се стандардни ергодички аргументи могу користити за утврђивање конзистентности и асимптотске нормалности (AN) предложених оцена. Следећа тврђења сумирају ова својства за претходни, хибридни поступак оцењивања параметара.

Теорема 5.17 (Јака конзистентност). Нека $\theta = (\rho, \lambda, \theta)^T$ означава вектор параметра QNH-PAR(1) процеса и нека је $\hat{\theta} = (\hat{\rho}, \hat{\lambda}, \hat{\theta})^T$ оцена за θ , добијена применом једначина (5.60) – (5.62). Тада је $\hat{\theta}$ строго конзистентна оцена за θ , тј. $\hat{\theta} \xrightarrow{s.s.} \theta$, када $T \rightarrow +\infty$.

Доказ. Према теоремама 5.9 и 5.14, QNH-PAR(1) процес (Z_t) је строго стационаран и геометријски ергодичан. Стога, ергодичка теорема за стационарне Марковљеве процесе имплицира да узорачки моменти конвергирају скоро извесно ка одговарајућим теоријским моментима (видети, нпр., (Meun & Tweedie, 2012)). Сходно томе, оцена $\hat{\rho}$, дефинисана у (5.60), представља строго конзистентну оцена за параметар $\rho = \text{Corr}(Z_t, Z_{t-1})$, тј. важи:

$$\hat{\rho} \xrightarrow{s.s.} \rho, \quad T \rightarrow \infty.$$

Даље, из горе наведене конвергенције и применом теореме о непрекидности скоро извесне конвергенције (видети, нпр., (Serfling, 2002), стр. 24) следи да псеудо-иновациони низ $(\hat{u}_t)$ скоро сигурно конвергира ка одговарајућим QHU-дистрибуираним независним иновацијама (ε_t) . Користећи добро познате чињенице о асимптотским својствима MLE оцена (видети, нпр., (Li & Babu, 2019)), као и особине QHU расподеле раније показане у (Стојановић, В.С. и сар., 2025b), следи да MLE оцене $(\hat{\lambda}, \hat{\theta})$, добијене решавањем система једначина (5.62), постоје и такође су строго конзистентне. Како се ове оцене асимптотски поклапају са правим MLE оценама QHU иновација, оне наслеђују њихова својства, одакле следи:

$$(\hat{\lambda}, \hat{\theta}) \xrightarrow{s.s.} (\lambda, \theta), \quad T \rightarrow \infty.$$

Најзад, одавде се, комбиновањем обеју претходно наведених конвергенција, добија тврђење дато у теореме. $\square$

Теорема 5.18 (AN својство). Нека $\theta = (\rho, \lambda, \theta)^\top$ означава вектор параметара QHU-PAR(1) процеса и нека је $\hat{\theta} = (\hat{\rho}, \hat{\lambda}, \hat{\theta})^\top$ оцена за θ , добијен применом једначина (5.60) – (5.62). Тада је $\hat{\theta}$ AN оцена за θ , тј.

$$(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_3(0, I(\theta)^{-1}), \quad T \rightarrow \infty, \quad (5.63)$$

где $I(\theta)$ означава асимптотску Фишерову информациону матрицу.

Доказ. Пошто је QHU-PAR(1) процес строго стационаран и геометријски ергодичан, стандардне централне граничне теореме (ЦГТ) за стационарне Марковљеве процесе дају (видети, нпр., (Jones, 2004)):

$$\sqrt{n}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_\rho^2), \quad T \rightarrow \infty, \quad (5.64)$$

за неку коначну асимптотску варијансу $\sigma_\rho^2 > 0$. Даље, према Теореме 5.16 и користећи дефиницију псеудо-иновација $(\hat{u}_t)$, следи:

$$\frac{z_t - \hat{\rho}z_{t-1}}{1 - \hat{\rho}} = \varepsilon_t + o_p(1).$$

Сходно томе, псеудо-логаритамска функција веродостојности $\ell_n(\lambda, \theta \mid \hat{\rho})$ се разликује од одговарајуће QHU логаритамске веродостојности за асимптотски занемарљиву

величину. Према резултатима утврђеним за QHU дистрибуцију, датим у (Стојановић, В.С. и сар., 2025b), MLE оцене $(\hat{\lambda}, \hat{\theta})$ задовољавају:

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} - \lambda \\ \hat{\theta} - \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_2(0, I_{\text{QHU}}^{-1}), \quad T \rightarrow \infty, \quad (5.65)$$

где I_{QHU} означава асимптотску Фишерову информациону матрицу QHU модела. Најјзд, према једначинама (5.64) и (5.65), следи:

$$\hat{\rho} = \rho + O_p(T^{-1/2}) \quad \text{и} \quad (\hat{\lambda}, \hat{\theta}) = (\lambda, \theta) + O_p(T^{-1/2}), \quad T \rightarrow \infty.$$

На тај начин, заједничко AN својство, дато једначином (5.63), следи из мултиваријантне CLT за геометријски ергодичне Марковљеве процесе (видети, нпр., (Douc, Moulines, Priouret, & Soulier, 2018)), заједно са стандардном асимптотском теоријом оцена максималне веродостојности за зависне узорачке опсервације ((Martin, 1976)). $\square$

Напомена 5.14. Теорема 5.18 пружа теоријску основу за конструисање асимптотских интервала поверења и Валдових тестова за све параметре предложеног модела. Штавише, она даје могућност примене Монте Карло (MC) студије, представљене у следећем одељку, чија је примарна сврха испитивање понашања предложених оцена на коначним узорцима и емпиријска верификација претходно утврђених асимптотских резултата.

5.2.2.3 Нумеричка симулациона студија

У циљу провере перформансе предложене процедуре оцењивања QHU–PAR(1) процеса на коначним узорцима, спроведена је опсежна MC симулациона студија. Главни њен циљ био је испитивање понашања предложених оцена коришћењем различитих узорачка, као и емпиријско испитивање њихових асимптотских својстава. Да би се проценио ефекат повећања величине узорка на тачност оцењивања, спроведене су симулације за неколико временских серија различитих дужина $T \in \{150, 500, 1500\}$. За сваку конфигурацију, коришћењем једнакости (5.50), генерисано је $S = 200$ независних репликација QHU–PAR(1) процеса (Z_t) са иновацијама $\varepsilon_t \sim \text{QHU}(\lambda, \theta)$. Да би се смањио утицај почетних вредности и осигурала приближна стационарност, укључен је тзв. „burn-in“ период, након кога су узете коначне реализације опсервираних узорака.

Затим, за сваку MC репликацију, оцењивање параметара је извршено коришћењем хибридног поступка предложеног у претходном делу. Најпре је процењен параметар

персистенције (ρ), на основу коефицијента аутокорејације првог реда, тј. коришћењем једнакости (5.60). У наставку, псеудо-иновације ($\hat{u}_t$) које асимптотски дају основне QNU иновације су конструисане кроз трансформацију дату једнакошћу (5.61). Најзад, преостали параметри (λ, θ) су оцењени максимизацијом функције условне логаритамске вредности $\ell_T(\lambda, \theta | \hat{\rho})$, односно решавањем система једначина (5.62).

Алгоритам симулације и сам поступак оцењивања имплементирани су у статистичком окружењу програмског језика „R“. Конкретно, нумеричка оптимизација је имплементирана коришћењем рутине „*optim*“ и оптимизационе методе „L-BFGS-B“, коју су увели Берд и др. (Byrd, Lu, Nocedal, & Zhu, 1995), док се R -пакет „*nortest*“ (Gross L. , 2013) користи за формалну оцену асимптотске нормалности добијених оцена. Реализације иновација (ε_t) са QNU расподелом имплементиране су нумерички, применом инверзно-трансформационог приступа заснованог на интерполацији CDF-а дате расподеле, што је резултирало значајним смањењем рачунарског оптерећења у поређењу са поновљеном нумеричком интеграцијом. За сваки параметар, израчунате су затим следеће сумарне статистичке мере:

- минимална вредност оцена,
- емпиријска средња вредност,
- максимална вредност оцена,
- стандардна девијација (SD),
- средња квадратна грешка оцено (RMSEE),
- фракциона стандардна грешка оцено (FSEE).

Поред тога, да би се емпиријски испитала AN предложених оцена, примењено је неколико дијагностичких тестова нормалности над емпиријским дистрибуцијама добијених оцена. Конкретно, спроведени су Крамеров фон Мисесов (CVM), Андерсон-Дарлинггов (AD) и Колмогоров-Смирнов (KS) тестови, а сумарни резултати свих горе наведених израчунавања приказани су у наредној табели 5-8. Овако добијени резултати указују на то да све оцено показују задовољавајуће перформансе над коначним узорцима и јасне доказе о конзистентности. Конкретно, параметар персистенције ρ је процењен са највећом тачношћу, што јесте последица његовог „одвојеног“ поступка оцењивања помоћу ACF-а. Насупрот томе, оцено параметра θ показују већу варијабилност у малим узорцима, иако се њихове перформансе значајно побољшавају са повећањем величине узорка, што сугерише

на конвергенцију ка теоријском асимптотском режиму. Генерално, нумерички резултати представљени у табели 5-8 указују на јасно побољшање тачности оцена са повећањем величине узорка, јер се емпиријске средње вредности свих оцена приближавају стварним вредностима параметара, док се статистике грешака (SD, RMSEE и FSEE) константно смањују.

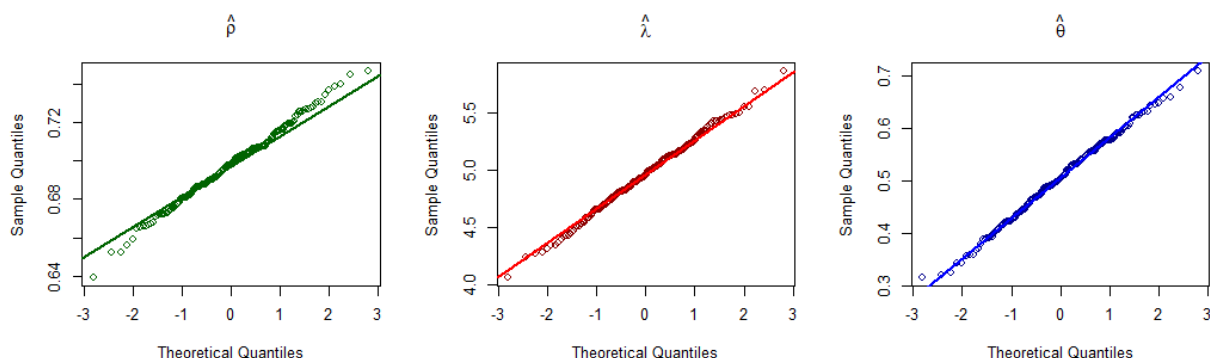
Табела 5-8. Сумарне статистике, грешке у оцени и AN тестирање оцена параметара QNU-PAR(1) процеса. (Праве вредности параметара су: $\rho = 0,7$, $\lambda = 5$, $\theta = 0,5$.)

Статистика	$T = 150$			$T = 500$			$T = 1500$		
	ρ	λ	θ	ρ	λ	θ	ρ	λ	θ
Min	0,4539	1,5055	0,0373	0,5869	3,4809	0,0375	0,6394	4,1006	0,3136
Ср. вред.	0,6845	4,9592	0,5187	0,6968	4,9687	0,4940	0,6978	5,0049	0,5011
Max	0,8158	6,6680	1,1274	0,7684	6,0294	1,1175	0,7466	5,9204	0,7038
SD	0,0586	0,8058	0,2593	0,0317	0,4457	0,1260	0,0185	0,3180	0,0752
RMSEE	0,0605	0,8044	0,2593	0,0318	0,4665	0,1293	0,0186	0,3173	0,0750
FSEE (%)	8,6445	16,0885	51,8640	4,5416	9,3292	25,8645	2,6563	6,3458	15,0095
CVM	0,0961	0,1190	0,1664*	0,0226	0,1013	0,1119	0,0480	0,0214	0,0301
(p-вредност)	(0,1265)	(0,0613)	(0,0144)	(0,9403)	0,1071	(0,0766)	(0,5372)	(0,9547)	(0,8449)
AD	0,6854	0,7301	1,2165**	0,1690	0,6574	0,7754*	0,2713	0,1574	0,1858
(p-вредност)	(0,0724)	(0,0561)	(0,0035)	(0,9340)	(0,0850)	(0,0434)	(0,6701)	(0,9521)	(0,9051)
KS	0,0547	0,0616	0,0989*	0,0290	0,0511	0,0760	0,0548	0,0264	0,0355
(p-вредност)	(0,5872)	(0,4320)	(0,0401)	(0,9960)	(0,6745)	(0,1989)	(0,5852)	(0,9990)	(0,9626)

* $0,01 < p < 0,05$; ** $p < 0,01$.

Поред тога, резултати горе наведених тестова нормалности указују на јасну конвергенцију ка Гаусовој (нормалној) расподели, са повећањем обима узорака, иако су приметна нека мања одступања од нормалности за оцену $\hat{\theta}$. Ипак, приметимо да за узорке обима $T = 1500$ оцене свих параметара показују потпуно слагање са нормалном расподелом, чиме је јасно потврђено AN својство. Како би се додатно испитало асимптотско понашање добијених оцена, слика 5-13 приказује тзв. Q–Q графиконе провере нормалности за све оцене добијене у овој MC студији, при чему је обим узорака $T = 1500$. Ови графички прикази јасно указују на висок степен слагања оцењених вредности параметара са нормалном расподелом, што је у потпуности у складу са претходним резултатима приказаним у табели 5-8. Истовремено, добијени резултати јасно потврђују претходно

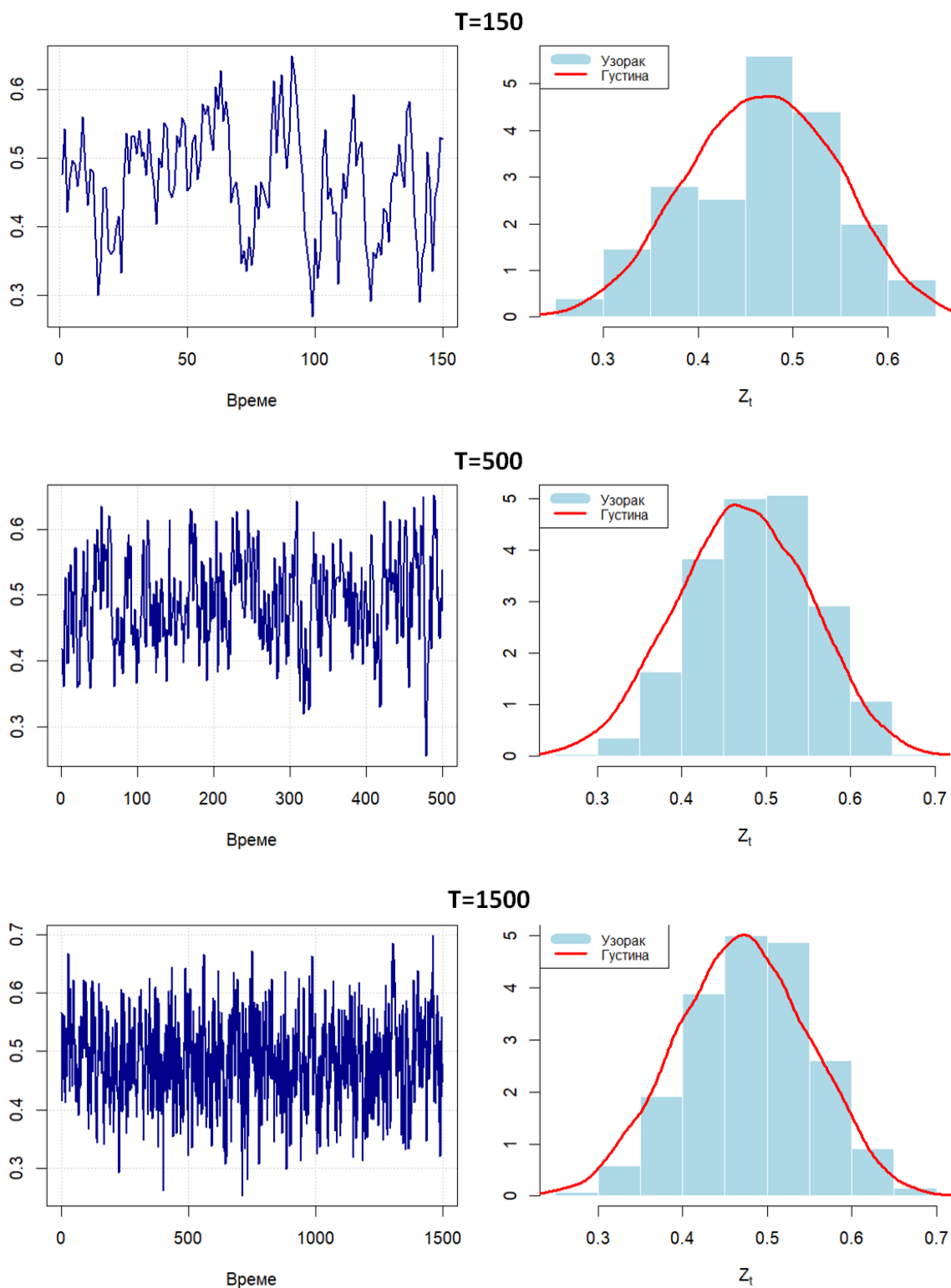
доказане теоријске чињенице, односно особине асимптотске нормалности ових оцена које су доказане у теорему 5.18.



Слика 5-13. Q-Q графикони оцењених параметара заснованих на $S = 200$ MC симулација узорака дужине $T = 1500$. (Праве вредности параметара су исте као у табели 5-8.)

Приметимо да се слика 5-13 односи на дистрибутивно понашање оцена над „великим“ узорцима, мада је такође корисно испитати њихове карактеристике и над коначном узорцима различитих дужина. У ту сврху, слика 5-14 приказује репрезентативне реализације QNH–PAR(1) процеса заједно са одговарајућим „уклопљеним“ (фитованим) стационарним густинама за све три раније наведене величине узорка. На графиконима лево приказана је временска еволуција датог процеса, која указује на перзистентну, али стационарну структуру зависности унутар јединичног интервала. Графикони десно приказују емпиријске дистрибуције (хистограме) за узорке различите дужине, заједно са фитованим стационарним густинама. Приметно је да постоји добро слагање емпиријских и фитованих расподела већ за умерене величине узорка, док са растом дужина серија она постаје све израженија.

На овај начин, слика 5-14 илуструје стационарну природу процеса, као и све већу сагласност између емпиријских и стационарних дистрибутивних карактеристика, како се величина узорка повећава. Посебно, случај када је $T = 1500$ показује висок степен слагања између емпиријске и стационарне густине, пружајући нову емпиријску потврду теоријских својстава QNH-PAR(1) процеса изведених у делу 5.2.1. Коначно, треба нагласити да су ова запажања такође у складу са претходним теоријским резултатима који су добијени у претходном одељку, а уједно и додатно поткрепљени резултатима MC симулација приказаним у претходној табели 5-8.



Слика 5-14. Лево: Временске реализације QHУ–PAR(1) процеса са различитом величином узорка $T \in \{150, 500, 1500\}$. Десно: Емпиријске расподеле (хистограми) посматраног процеса заједно са уклопљеном стационарном густином. (Праве вредности параметара су исте као у Табели 5-8.)

5.2.2.4 Практична примена модела

Поред теоријске анализе, предложени QNU-PAR(1) процес је такође примењен у проучавању динамике криминалних активности, где се релативна заступљеност различитих категорија криминала мења током времена. Конкретно, овде разматрамо практичну примену QNU-PAR(1) модела у испитивању динамике временских серија везаних за број специфичних кривичних дела почињених на територији Републике Србије. Посматрани подаци су, као раније, добијени на основу дневно праћених званичних евиденција Министарства унутрашњих послова Републике Србије, почев од 1. јануара 2015. године и закључно са 31. децембром 2024. године. На овај начин су, како је већ било речи у уводном делу ове дисертације, добијене временске серије дужине $T = 3653$. Оне су такође класификоване према званичном Кривичном законик у Републике Србије (шифра KD_xxx), и ради једноставности, означене су на следећи начин:

1. Серија А: Ситна крађа (шифра KD_203).
2. Серија В: Тешка крађа и разбојништво (шифра KD_204).
3. Серија С: Фалсификовање (новац, хартије од вредности, документи и остало) (кодови KD_241-244 и KD_355-357).

Треба напоменути да је овај скуп података већ претходно анализиран (Стојичић, С. и сар., 2026), при чему је нормализација овде извршена у односу на њихове максималне вредности, што омогућава да се на тај начин добију опсрвације унутар јединичног интервала $(0,1)$. Сходно томе, оне су посебно погодне за моделовање ограниченим ауторегресивним процесима и пружају природни оквир за примену предложеног QNU-PAR(1) модела. Са форензичког аспекта, предложена нормализација омогућава истраживање структурних односа између различитих категорија криминалних активности, а не њихових апсолутних фреквенција. Сходно томе, резултујући процес дефинисан на јединичном интервалу може се тумачити као динамички индикатор релативне равнотеже између повезаних облика криминалног понашања. Праћење таквих индикатора током времена може пружити корисне информације о дугорочним трендовима криминала, структурним променама у криминалним обрасцима и могућим променама у активностима преступника или ефикасности спровођења закона. То је такође евидентирано основним статистичким показатељима посматраних серија, датим у табели 5-9.

Табела 5-9. Сумарна статистика опсервираних података о криминалу.

Статистика	Серија А	Серија В	Серија С
Min	0,0000	0,0000	0,0000
Средња вредност	0,3099	0,2797	0,8950
Медијана	0,3026	0,2619	0,9478
Мод	0,2895	0,2347	0,9649
Мах	1,0000	1,0000	1,0000
Станд. девијација	0,0943	0,0971	0,1471
Варијанса	0,0089	0,0094	0,0216
Коеф. асиметрије	1,3539	1,4730	-3,0067
Коеф. спљоштености	8,6428	7,8437	13,7769

Истакнимо да табела 5-9 указује на неколико важних карактеристика емпиријских дистрибуција посматраних серија. Најпре, приметимо да су сва три нормализована процеса строго ограничена унутар јединичног интервала, што је и очекивано на основу примењене процедуре нормализације. Затим, емпиријске дистрибуције показују значајна одступања од симетрије. Конкретно, Серија А и Серија В карактеришу се израженом позитивном асиметријом, док Серија С показује јаку негативну асиметрију. Штавише, све серије поседују високе вредности коефицијента спљоштености, што указује на теже „репове“ и већу концентрацију око централног региона у поређењу са униформном дистрибуцијом. Овакви налази указују на то да је за адекватно описивање посматраних динамика и добијених емпиријских расподела потребно коришћење флексибилних јединичних теоријских расподела, које могу имати и позитивну и негативну асиметрију.

Додатно, како би се оценила практична ефикасност предложеног QHU-PAR(1) процеса, слично као у (Стојановић, В. и сар., 2024б; Стојановић, В. и сар., 2024а), његова прилагођеност је упоређена са два добро позната и широко коришћена алтернативна ауторегресиона модела. Реч је о тзв. Beta-PAR(1) и Kumaraswamy-PAR(1) моделима, заснованих на бета и Кумарасвамијевим јединичним иновацијама, респективно. На тај начин, за све три спецификације, параметар перзистенције ρ је оцењен помоћу аутокорељације узорка, као што је описано у преходном делу.

Након тога, остали параметри (λ, θ) су оцењени различитим поступцима, за сваку од наведених расподела иновација понаособ. Тако, за предложени QHU-PAR(1) модел,

коришћен је претходно описан поступак оцењивања, тј. након добијања оцено $\hat{\rho}$, псеудо-иновације су конструисане према једначини (5.60), а на основу њих су оцењени параметри (λ, θ) , коришћењем раније описаних MLE-оцена. За Beta-PAR(1) модел, параметри расподеле иновација, означени са (a, b) , оцењени су методом момената (видети, нпр., (Kachiashvili & Melikdzhanjan, 2019)). Означивши са $\bar{u}$ и s^2 , респективно, средњу вредност и варијансу оцењених псеудо-иновација, осене датих параметара су дате изразима:

$$\hat{a} = \bar{u} \left(\frac{\bar{u}(1 - \bar{u})}{s^2} - 1 \right), \quad \hat{b} = (1 - \bar{u}) \left(\frac{\bar{u}(1 - \bar{u})}{s^2} - 1 \right).$$

Најзад, за Кумарасвами-PAR(1) модел, параметри иновација (a, b) , слично као код QNH-PAR(1) модела, оцењују се коришћењем MLE метода (видети, нпр., (Dey, Mazucheli, & Nadarajah, 2018)) и истог узорка псеудо-иновација. Притом се одговарајућа логаритамска функција веродостојности нумерички максимизира у односу на оба параметра, а целокупна естимациона процедура је извршена на исти начин као у случају QNH-иновација. На тај начин, поређење ова три PAR-модела се не врши само у смислу дистрибуција, већ и у смислу различитих процедура оцењивања, од којих је једна идентична процедури оцено параметара предложеног модела.

Сви теоријски модели се затим упоређују коришћењем неколико комплементарних критеријума. Најпре се за оцено укупне адекватности модела користе тзв. мере информација, тј. Акаикеов информациони критеријум (AIC), Бајесов Акаикеов информациони критеријум (BIC) и Ханан-Квинов информациони критеријум (HQIC). Поред стандардних критеријума заснованих на веродостојности, фитовани модели су такође процењени у односу на саме опсервиране серије. У том циљу, за квантификацију одступања између емпиријских и прилагођених дистрибуција иновација, користи се RMSEE, која се израчунава на основу густине иновационих серија. Коначно, израчуната је и тзв. интегрисана квадратна грешка (енг. *Integrated Squared Error* – ISE):

$$ISE(Z) = \int_0^1 [\hat{f}_Z(z) - f_Z(z)]^2 dz,$$

где $\hat{f}_Z(z)$ означава емпиријску оцено густине посматраног низа, док је $f_Z(z)$ је стационарна густина фитованог PAR(1) модела. На овај начин, ISE(Z) представља интеграл квадрираних разлике одговарајућих функција густине, тј. квантификацију укупног одступања између

њих. Стога, мање вредности RMSEE и ISE(Z) указују на ближе подударање између посматраних података и уклопљеног стохастичког модела.

Оцењене вредности параметара, као и горе наведене мере фитовања приказане су у табели 5-10 и указују на неколико важних карактеристика посматраних серија. Најпре, по квалитету уклапања, предложени QHU-PAR(1) модел надмашује оба конкурентска модела, Beta-PAR(1) и Кумарасвами-PAR(1), и то у свим опсервираним серијама података. Ова супериорност је очигледна на основу мањих вредности AIC, BIC, HQIC, RMSEE и ISE(Z), што указује на знатно боље слагање између предложеног модела и емпиријских дистрибуција. Конкретно, резултати приказани у табели 5-10 пружају додатне доказе да предложени QHU-PAR(1) модел не само да добро одговара псеудо-иновацијама, већ и репродукује целокупно дистрибутивно понашање посматраних коначних временских серија прецизније од конкурентских модела.

Табела 5-10. Процењени параметри модела и мере добротe подударања за три конкурентне QHU-PAR(1) спецификације.

Параметри/	Серија А			Серија В			Серија С		
Статистика	QHU	BETA	KUM	QHU	BETA	KUM	QHU	BETA	KUM
ρ	0,3495	0,3495	0,3495	0,5764	0,5764	0,5764	0,5998	0,5998	0,5998
λ/a	17,0986	3,4855	1,8487	9,2313	1,7636	1,1048	0,4976	1,3198	1,2250
θ/b	$1,43 \times 10^{-6}$	7,7641	5,8913	147,63	4,5120	2,7051	0,3454	0,1799	0,2822
AIC	-6095,9	-4627,5	-3216,0	-4362,5	-3332,9	-2179,8	-8721,5	-176,39	-3969,7
BIC	-6083,5	-4615,1	-3203,6	-4350,1	-3320,5	-2167,4	-8709,1	-163,98	-3957,2
HQIC	-6091,5	-4623,1	-3211,6	-4358,0	-3328,5	-2175,4	-8717,1	-171,97	-3965,2
RMSEE	$1,42 \times 10^{-3}$	$1,79 \times 10^{-3}$	$8,52 \times 10^{-3}$	$1,83 \times 10^{-3}$	$2,21 \times 10^{-3}$	0,0170	$2,45 \times 10^{-3}$	$2,72 \times 10^{-3}$	0,0109
ISE(Z)	0,04842	0,0991	0,3808	0,1019	0,1215	0,2803	0,0664	0,1023	0,4129

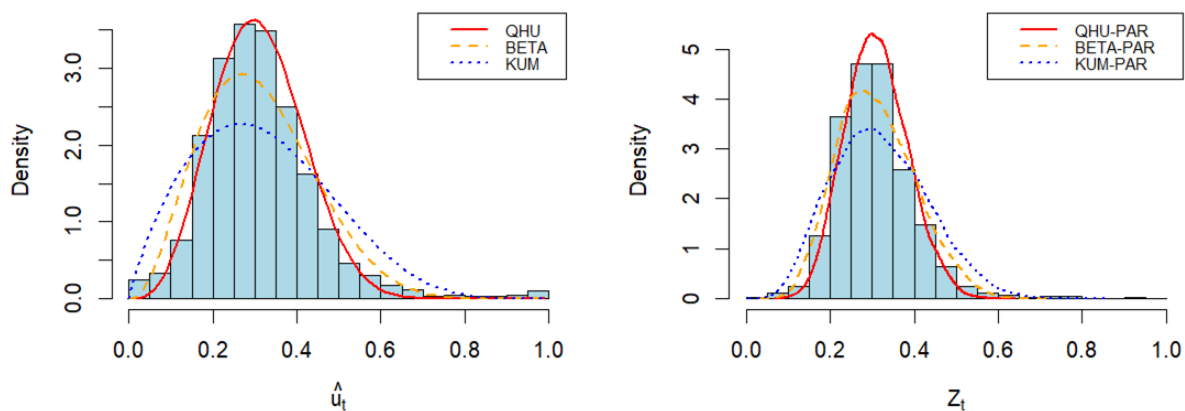
Треба напоменути да добијене оцене додатно илуструју флексибилност QHU дистрибуције иновација кроз одговарајући PAR модел. Веће вредности ρ указују на јачу временску перзистентност основног обрасца криминала, што сугерише да релативни интензитет датих категорија КД настоји да остане стабилан током времена, док мање вредности указују на нестабилнију и мање предвидљиву динамику криминала. Даље, за

Серију А, оцењени параметар скалирања је изузетно близак нули ($\hat{\theta} = 1,43 \times 10^{-6}$), што указује на гранични режим у коме је облик стохастичке расподеле скоро у потпуности одређен параметром λ . Насупрот томе, Серија В даје веома велику оцену истог параметра ($\hat{\theta} = 147,63$), што одговара асимптотском режиму где се QНУ дистрибуција приближава понашању сличном као код Кумарасвамијеве расподеле (видети, за више детаља, Теорему 2.7 и Напомену 2 у (Стојановић, В.С. и сар., 2025b)). Коначно, Серија С производи оцену $\hat{\lambda} = 0,4976 < 1$, што имплицира монотono растућу густину иновација, која је у потпуном складу са израженом негативном асиметријом примећеном у емпиријским подацима.

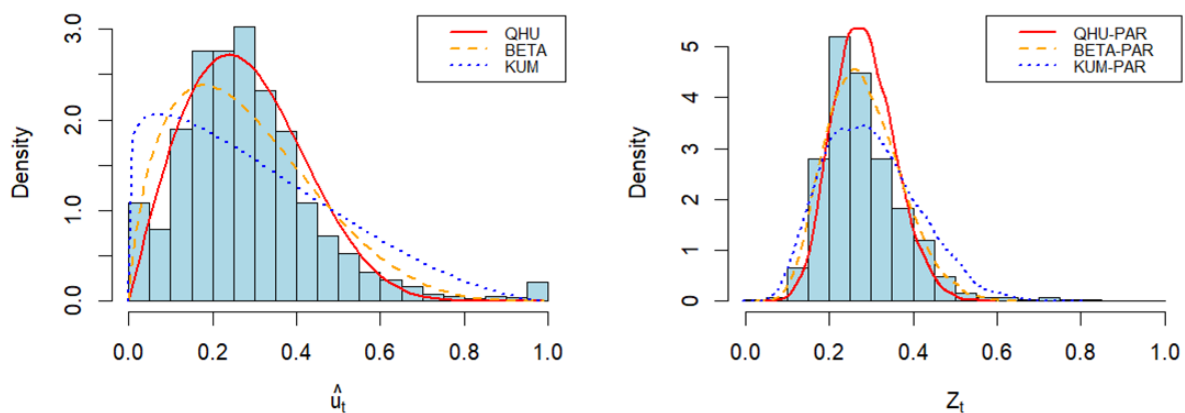
Ови налази такође показују да је предложена стохастичка структура иновација способна да се прилагоди значајно различитим облицима дистрибуције, а да притом очува јединствени стохастички оквир. Конкретно, три анализиране серије одговарају трима различитим режимима које одређују параметри QНУ дистрибуције, наиме режиму „скоро нулте“ скалиране вредности (Серија А), асимптотском режиму великих скалираних вредности (Серија В) и режиму растуће густине (Серија С). На тај начин је потврђена теоријска флексибилност QНУ–PAR(1) модела, која истовремено наглашава и његову практичну корисност у описивању хетерогених стохастичких феномена над коначним, ограниченим скуповима вредности. Као илустрација, слика 5-15 даје визуелно поређење емпиријских дистрибуција и фитованих густина добијених према QНУ, Beta и Kumaraswamy спецификацијама. Леви дијаграми одговарају оцењеним псеудо-иновацијама, док десни панели приказују посматране нормализоване серије криминала заједно са стационарним дистрибуцијама генерисаним помоћу одговарајућих фитованих PAR(1) модела.

Приметимо да у свим разматраним случајевима, предложени модел заснован на QНУ расподели показује најближе слагање са емпиријским хистограмима, посебно у близини модалног региона. С друге стране, модел заснован на бета расподели даје доста добру апроксимацију, док се код Кумарасвамијеве спецификације јавља „прецењена“ дисперзија и приметно већи „репови“ расподеле. Ови визуелни прикази су у потпуности у складу са нумеричким резултатима приказаним у табели 5-10 и додатно подржавају адекватност предложеног QНУ-PAR(1) оквира за моделиовање ограничених временских серија повезаних са криминалом.

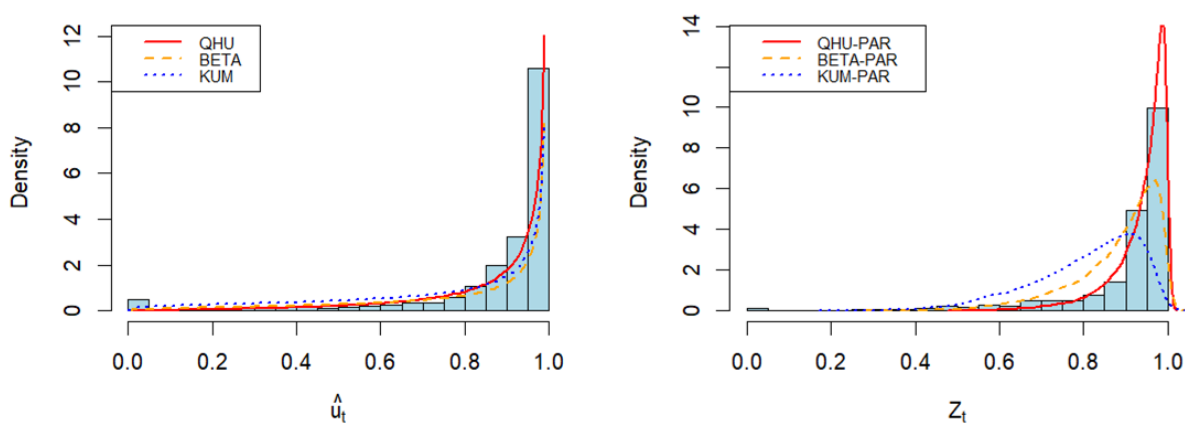
Серија А



Серија В



Серија С



Слика 5-15. Лево: Временске реализације QHU–PAR(1) процеса са различитим величинама узорка $T \in \{150, 500, 1500\}$. Десно: Емпиријске дистрибуције (хистограми) посматраног процеса заједно са приказаном стационарном густином.

На овај начин, резултати добијени анализом могућности примене QHU–PAR модела представљају значајан допринос који може бити примењен за унапређење организације и оптимизације рада форензичких стручних служби. Као што је већ истакнуто, према тренутно доступним литературним изворима, PAR модели нису досад коришћени у моделовању криминалних активности, тако да овакво моделовање представља нов и оригиналан приступ моделовању у анализи криминалитета. Стога, претходно добијени резултати указују на то да предложени модел представља адекватан алат за анализу стохастичких процеса ограничених на јединичном интервалу, а који могу имати различите дистрибутивне облике.

6. ФОРЕНЗИЧКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА И ПРИМЕНА МОДЕЛА

На основу чињенице да фореника представља примену науке за доказивање дела према кривичном и грађанском праву, она се у значајној мери заснива на примени знања и методологија различитих научних дисциплина ради проналажења одговора на правно релевантна питања. У том контексту, основ за спровођење овог истраживања представљала је фореничка перспектива примене математичких модела са циљем доприноса свеобухватнијем разумевању динамике криминала у корелацији са применом метода фореничког инжењерства. На овај начин се остварује допринос ефикаснијој примени метода фореничког инжењерства, кроз оптимизацију ресурса за њихово спровођење, времена ангажовања, а самим тим и убрзања самих истражних процеса.

Како је математика фундаментална за све врсте примењене науке и научне дисциплине, математичко моделирање налази све већу примену у пракси фореничке науке, нудећи структуриран и објективан начин тумачења сложених облика доказа (Gecioglu, 2025). Примена ових модела смањује ограничења субјективне анализе образаца и представља адекватан одговор на потребу за квантификационим метрикама поузданости.

Форенички аспект примене математичких модела у спроведеном истраживању представљао је основ за извођење закључака, а на основу анализе учесталости појављивања одређених КД, посматраних у облику временских серија. Као што је претходно наведено у спроведеном истраживању анализиран је број КД на дневном нивоу, посматран као временска серија за одабране врсте КД са значајном учесталосту појављивања, а затим је примењен и на КД са мањим степеном учесталости. Резултати истраживања указују на могућност примене математичких модела временских серија у фореничком инжењерству и криминалистици за идентификовање образаца криминалних активности, анализу њихове динамике и реконструкцију релевантних аспеката догађаја. На тај начин математички модели могу представљати основу за извођење закључака релевантних за планирање и спровођење истражних радњи, као и за процену и интерпретацију чињеница значајних у процесу доказивања.

У том смислу, циљ овог поглавља је да трансформација математичких резултата у форенички релевантне информације, односно приказ начина на који начин предложени

математички модели могу да подрже: идентификацију образаца криминалних активности, препознавање ризичних ситуација, доношење одлука у процесу форензичке анализе, оптимизацију употребе ресурса. То значи, да се математички модели могу посматрати као инструмент за унапређење ефикасности форензичких анализа, као и за систематичније и објективније долажење до закључака и резултата који могу бити од значаја за даље процесне радње усмерене на расветљавање КД. Истовремено, њихова примена може допринети квантификацији степена поузданости добијених резултата и обезбедити додатну аналитичку основу за интерпретацију и презентацију доказа у судским поступцима.

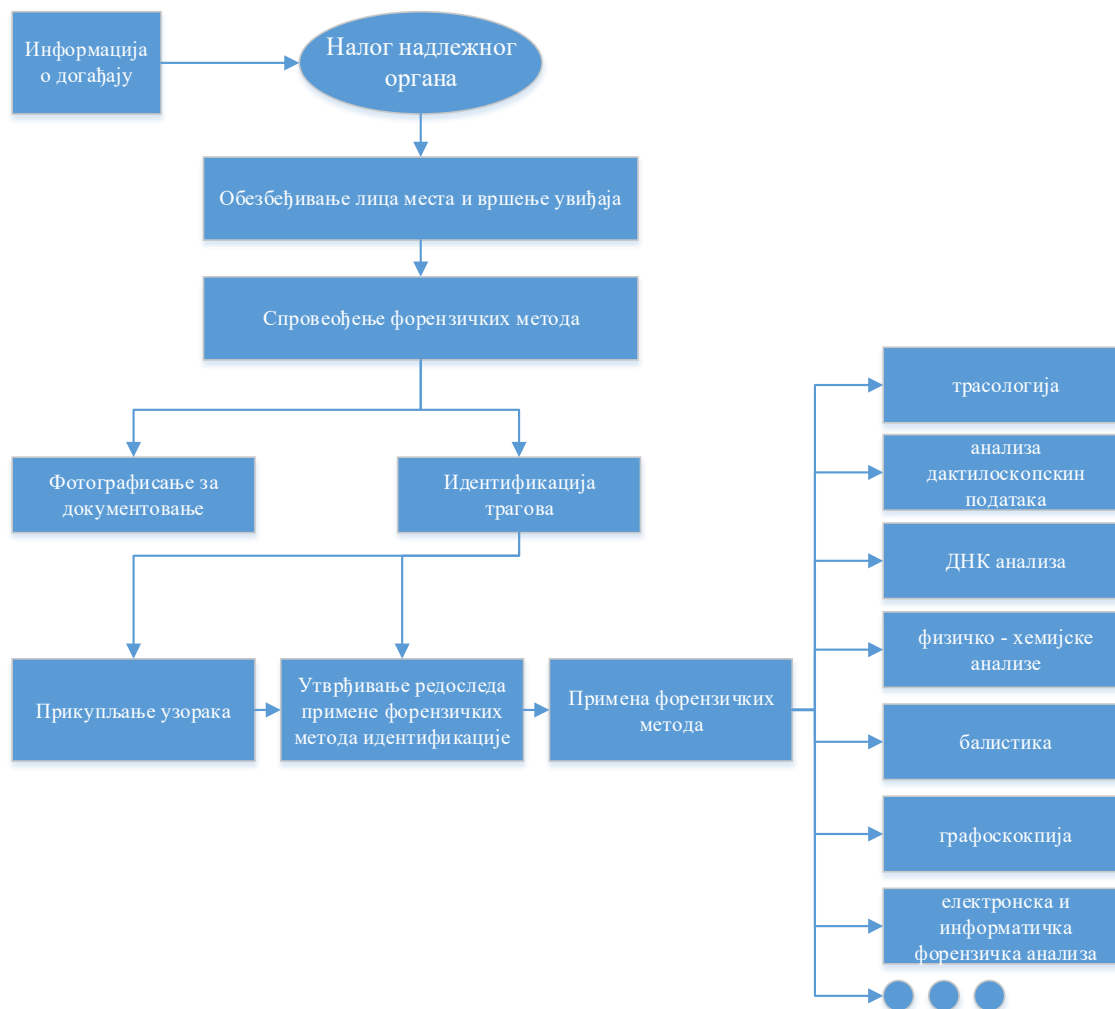
6.1 ИДЕНТИФИКАЦИЈА ФОРЕНЗИЧКЕ ПЕРСПЕКТИВЕ ПРИМЕЊЕНИХ МОДЕЛА

Резултати добијени у претходним поглављима, који обухватају развој детерминистичких и стохастичких модела динамике криминалних активности, пружају формални оквир за анализу сложених образаца у посматраним подацима. Међутим, њихова пуна вредност долази до изражаја тек уколико се интерпретирају у контексту форензичке анализе и примене у пракси.

На Слици 6-1, дат је општи опис примене форензичко-инжењерских метода које могу бити примењене за случајеве анализираних КД, како би се јасније представила веза са резултатима примене математичких модела, односно утврдили елементи који су релевантни из форензичке перспективе. Према искуствима добре праксе, традиционални форензички приступ је примарно усмерен на трагове, који се могу наћи на месту извршења КД. Трагови омогућавају процену времена извршења КД, указују на и начин извршења кривичног дела, и омогућавају идентификују учиниоца, жртве и других особа, које су повезане са догађајем који је предмет истраге. Како се на самом месту догађаја могу наћи и трагови који нису директно повезани са самим извршењем КД, а који могу довести до погрешног усмерења истраге, рано препознавање и карактеризација је од посебног значаја са аспекта примене форензичких метода. На тај начин они могу имати непосредан утицај на успешност откривања и доказивања конкретног КД.

Спектар метода који се може применити у контексту утврђивања чињеница везаних за трагове је широк, при чему се избор заснива на процени стручног лица, природи и карактеристикама трагова, као и расположивости материјално техничких услова за њихову

примену. У овом контексту процене и усмерења која се добијају применом математичког моделовања могу бити од значаја за планирање, рационализацију и оптимизацију расположивих ресурса.



Слика 6-1. Општа шема примене форензичко-инжењерских метода

За процену потребног времена за примену форензичко-инжењерских метода за обраду трагова не постоји универзална и јединствена стандардизована мера, већ се она у значајној мери заснива на искуству и специфичностима конкретних случајева. Сама примена и време потребно за спровођење метода условљени, су контекстом случај, квалитетом и количином прикупљеног материјала, расположивим ресурсима, захтеваним нивоом поузданости налаза и другим околностима појединачних случајева. Искуства из праксе, такође указују да комбинација више метода доприноси повећању поузданости форензичких анализа и

интерпретације добијених резултата. О наведеном сведоче обим и временски оквир примене форензичких анализа, приказани у Табели 6-1, који су дати на основу стандарда и искустава добре праксе за примену појединачних метода, у односу на број анализираних дела у посматраном узорку. За приказ временског оквира као јединица мере коришћен је сат.

Табела 6-1. Процена времена потребног за примену форензичких метода у посматраном узорку

Чл. КЗ	Назив дела	Број (2015-2024)	КД	Време обrade (h)		Укупно (h)	
				min	max	min	max
203	Крађа	172.259	ДНК анализа	8	24	1.378.072	4.134.216
			Дактилоскопија	8	16	1.378.072	2.756.144
			Дигитална форензика	8	40	1.378.072	6.890.360
			Трасологија	8	40	1.378.072	6.890.360
204	Тешка крађа	128.480	ДНК анализа	8	24	1.027.840	3.083.520
			Дактилоскопија	8	16	1.027.840	2.055.680
			Дигитална форензика	8	40	1.027.840	5.139.200
			Трасологија	8	40	1.027.840	5.139.200
206	Разбојништво	12.526	ДНК анализа	8	24	100.208	300.624
			Дактилоскопија	8	16	100.208	200.416
			Дигитална форензика	8	40	100.208	501.040
			Трасологија	8	40	100.208	501.040
			Балистика	8	24	100.208	300.624
			Анализа структуре и својстава материјала	8	24	147.040	441.120
355	Фалсификовање исправе	18.380	Дигитална форензика	8	40	147.040	735.200
			Графоскопија	8	40	147.040	735.200

На основу података приказаних у Табели 6-1 може се сагледати процењени временски оквир за примену појединачних форензичких метода. На основу ових података може се закључити да је адекватно планирање од посебног значаја и да треба да буде засновано на проценама и усмеравањима, која се могу добити на основу експертског мишљења, искуства из праксе и примене математичког моделовања. Посебно је значајно имати у виду да се тачност научно заснованих и валидираних форензичких метода, укључујући декларисане стопе грешке (лажно позитивних и лажно негативних), односи њихову примену у контролисаним условима. У пракси временски оквир за примену форензичких анализа

може варирати у зависности квалитета и карактеристика самог узорка, сложеност случаја, количине расположивих података и других релевантних фактора. Временски оквири дати у Табели 6-1 су у складу са захтевима који се односе на квалитет и захтевима за валидност резултата форензичких анализа који су дефинисани стандардом ISO/IEC 17025 и релевантним смерницама Европске мреже института форензичких наука (ENFSI)¹⁹.

Примена математичких модела, као аналитичких инструмената у форензичким анализама може да допринесе ефикаснијој процени потребног обима форензичких испитивања, смањењу броја непотребних анализа, као и оптимизацији редоследа и коришћења расположивих ресурса. Истовремено математички модели могу допринети идентификацији образаца и потенцијалних повећања оптерећења стручних служби. Примена математичких модела у односу на временску динамику дешавања посматраних појава, може да пружи аналитичку подршку процесима планирања и организације рада, оптимизацију коришћења расположивих ресурса и ефикаснијем доношењу одлука. У том смислу математички модели као инструменти форензичке аналитике у анализи различитих криминалних појава, обезбеђујући формализовану основу за квантитативну процену података и пружање подршке спровођењу истрага и доношењу одлука.

6.2 ФОРЕНЗИЧКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА ДЕТЕРМИНИСТИЧКОГ (МСА) МОДЕЛА

МСА модел, приказан у четвртном поглављу, заснован је на систему диференцијалних једначина и омогућава описивање основних структурних законитости у динамици криминалних активности. Како је већ раније истакнуто, за разлику од досадашњих приступа примени НРМ-а, у којима је коришћено само неколико почетних итерација за добијање апроксимативног НРМ-решења, без детаљније анализе њихове конвергенције, у спроведеном истраживању примењен је оригинални приступ примени НРМ-а у решавању МСА модела.

¹⁹ ENFSI - Европска мрежа института форензичких наука, организација која је основана 1995. године са циљем унапређења стандарда у области форензичких наука, размене информација и повезивања форензичких лабораторија у Европи.

Примењени приступ обухвата испитивање стабилности, егзистенције и јединствености решења МСА модела. Практична примена предложеног модела је приказана на скупом реалних података из посматраном узорку, који се односе на учесталост изабраних КД током претходног десетогодишњег периода. При томе је апсолутна учесталост посматраних КД трансформисана у релевантни индикатор оперативног оптерећења, на основу којег се, између осталог, може планирати ангажовање форензичких ресурса. Кључне карактеристике овог модела са становишта форензичког приступа огледају се у неколико аспеката, који су детаљније описани у наставку.

6.2.1 Анализа стабилности система

Стабилност МСА система, може се тумачити као индикатор контролисаног стања криминалних активности, док појава нестабилности указује на потенцијалне ризике и потребу за појачаним ангажовањем стручних служби, као и за применом адекватних форензичко-инжењерских метода. Идентификација нестабилних режима у посматраним учесталостима одређених КД, представљеним у облику временских серија, може указати на потребу планирања и спровођења појачаних активности усмерених на очување и унапређење безбедност грађана и имовине, као и на потребу за додатним ангажовањем форензичких ресурса.

На основу добијених резултата може се закључити да стабилан МСА режим указује на контролисано и релативно предвидиво криминално окружење, без наглих структурних промена у обрасцима криминалитета, а самим тим и на релативно ниску варијабилност кључних индикатора у посматраном временском и просторном контексту. Стабилан МСА режим, стога, не указује на непосредну потребу за променама у планирању, начину и организацији рада са форензичког аспекта.

Нестабилност МСА система може се сматрати као индикатор ризика, јер може бити праћена повећањем варијансе вредности критеријума, појавом структурних прекида у временским серијама учесталости посматраних КД, као и наглим промена у тежинама и рангирању критеријума. У форензичко-инжењерском смислу, таква нестабилност може указивати на повећање учесталости криминалних активности, појаву нових образаца криминалног понашања и/или нових начина извршења КД, као и на повећање просторне концентрације одређених облика криминалитета. Све наведено може довести до повећања

форензичке неизвесности, која се може разматрати у контексту повећане ентропије посматраног система.

6.2.2 Идентификација критичних тачака

Применом МСА модела могу се идентификовати критичне, односно равнотежне, тачке система учесталости одређених КД у посматраном узорку, које представљају стања у којима може доћи до промене динамике система. Ове тачке могу одговарати прелазима између различитих облика криминалних активности, што може указивати на потребу за прилагођавањем форензичке аналитике, унапређењем постојећих и/или увођењем нових форензичко-инжењерских метода. Идентификација критичних тачака може указивати на појаву нових облика криминалних активности или промену у начину извршења КД, што, такође, може указати на потребу за применом већег броја форензичко-инжењерских метода или на укључивање нових метода у процес анализе.

У овој студији су добијене задовољавајуће оцене у односу на учесталости према изабраним КД у посматраном узорку, представљене у облику временских серија. При томе је важно нагласити да посматране временске серије имају стохастичку компоненту, због чега постоје одступања између апроксимационих функција, којима се описује детерминистичка компонента и емпиријских вредности посматраних временских серија. Одступање од претходно идентификованих равнотежних стања, може се тумачити као индикатор потенцијалне промене у структури криминалних активности. Таква промена може бити повезана са појавом нових облика криминалних активности или промена у начину извршења КД, што може захтевати прилагођавање форензичке аналитике, примену одговарајућих форензичко-инжењерских метода и оптимизацију ангажовања расположивих форензичких ресурса.

6.2.3 Динамичко праћење трендова

Практичне примене МСА модела омогућава праћење дугорочних трендова, односно учесталости одређених категорија КД током времена, уз истовремено сагледавање и прилагођавање форензичког аспекта анализе. Модел, такође, омогућава спровођење процену динамике ових трендова и интеграцију хетерогених индикатора, као што су учесталост КД, њихова „тежина“, просторна конотација, као и латенца у односу на

откривање и расветљавање околности повезаних са извршеним кривичним делима. На тај начин омогућава се динамично одређивање тежинских фактора, чиме МСА модел поприма карактер адаптивног приступа, за разлику од фиксно дефинисаних методолошких принципа и модела. Динамично праћење трендова омогућава лакше уочавање прагова и нестабилних режима, што се може довести у непосредну везу са планирањем и ангажовањем форензичких ресурса, као и остваривањем прилагођавања начина рада и организације од оперативног до стратешког нивоа.

Допринос примене МСА модела може се остварити и у односу на оптимизацију коришћења форензичких ресурса, кроз динамично праћење трендова, које омогућава приоритизацију анализа и укључивање фактора повезаних са деградацијом узорка. На основу добијених резултата применом модела динамике праћења трендова могу се идентификовати потребе за ангажовањем стручних лица и оптимизовати њихово распоређивање у складу са очекиваним оптерећењем. Динамичко праћење трендова добијених применом модела омогућава и процену будућег оптерећења форензичке службе, што ствара основу за благовремено планирање људских и материјално-техничких ресурса, као и за обезбеђивање материјално-техничке основе неопходне за ефикасно функционисање форензичких служби.

6.2.4 Форензички значај НРМ апроксимације

Добијена прецизност НРМ апроксимација применом модела на посматраном узорку, омогућава релативно поуздану реконструкцију динамике криминалних активности, што је потврђено анализом временских серија које представљају учесталости изабраних категорија КД. У складу са иницијалном анализом посматраног узорка, у првом кораку су анализиране серије КД са високом учесталостју, како би се обезбедила адекватна основа за примену модела, а потом је иста примењена на КД која се појављују са значајно мањом учесталостју (Табела 6-1). У оба случаја добијени резултати показују да НРМ апроксимације конвергирају ка решењима која адекватно описују емпиријске податке у посматраном узорку. На тај начин примена овог модела добија методолошко оправдање и може имати посебан значај у форензичкој аналитици, у којој је често неопходно доносити закључке на основу ограничених, често непотпуних и стохастички варијабилних података. Примена модела може допринети процени и предвиђању будућег обима ангажовања

форензичких ресурса, као и ефикаснијем планирању коришћења расположивих ресурса у складу са очекиваном криминалних активности које захтевају њихово ангажовање.

6.2.5 Форензички значај валидације на реалним подацима (Серије А, В, С)

Примарни циљ валидације јесте провера применљивости модела на реалним подацима, односно верификација конвергенције НРМ апроксимација ка правом решењу МСА система. Разматрана су решења за различите почетне (граничне) услове, при чему су НРМ апроксимације конструисане тако да задовољавају граничне услове еквивалентне онима које задовољавају права решења МСА система.

Прво је разматран посматрани МСА систем (Серија А), у којем почетне вредности броја извршених КД и динамичка атрактивност криминалних активности, имају константну тенденцију повећања. На основу добијених НРМ серија, одређене су НРМ апроксимације, које представљају апроксимативна решења посматраног МСА система.

У циљу одређивања нивоа конвергенције добијених апроксимација, израчунате су одговарајуће грешке апроксимација, односно следеће три мере: максимална апсолутна разлика апроксимација (MAD), максимална апсолутна грешка (MAE) и максимална фракциона грешка (MFE). Вредности MAD, MAE и MFE дате су у Табели 4-1.

Према добијеним резултатима, код обе серије НРМ апроксимација уочава се изражена конвергенција, ка реалном решењу МСА система. Са становишта форензичке примене, добијени резултати указују на то да НРМ апроксимације, конвергирају ка правом решењу у односу на емпиријске податке у посматраном узорку и могу адекватно апроксимирати динамику посматраног МСА система и представљати основу за његову примену у форензичкој аналитици.

У Серији В, слично претходној Серији А, разматрана је НРМ-серија уз граничне услове, постављене тако да у почетном тренутку нема информација о тренутном броју КД. На основу задатих почетних услова добијене су НРМ апроксимације и одговарајућа решења нормализованог посматраног МСА система. Слично као у случају Серије А, добијени резултати показују да постоји изразита конвергенција добијених приближних решења ка тачном решењу МСА модела (Табела 4-2).

Конвергенција обе разматране серије додатно потврђује оправданост примене предложене НРМ процедуре за приближно решавање МСА модела. Добијени резултати

указују на то да НРМ апроксимације конвергирају ка правом решењу МСА система у односу на емпиријске податке у посматраном узорку и да могу бити коришћене за апроксимацију динамике посматраних криминалних активности, што представља основу за њихову примену у форензичкој аналитици..

Слично претходном даље је разматран проблем проналажења (граничног) решења посматраног МСА система, Серија С, при чему обе посматране функције имају константне вредности у граничној тачки. На основу задатих граничних услова, као почетно НРМ решење се добијају константне функције, потом поновном применом, добијају остали чланови НРМ серија и решења за равнотежну тачку посматраног МСА модела. Поклапање између моделских резултата са емпиријским подацима указује да МСА модел адекватно описује основну динамику одређених криминалних активности у посматраним узорку, а тиме се потврђује његова применљивост у форензичкој аналитици.

6.2.6 Форензичка примена МСА модела

У претходним поглављима, показана могућност моделовања података о учесталости евидентираних КД у посматраном узорку коришћењем описаног МСА модела и НРМ поступка. Примена модела извршена је на опсервираним серијама података о учесталостима одређених КД, израженим у облику процентуалне заступљености у односу на укупан број евидентираних дела. Након тога, подаци су додатно нормализовани у односу на максималну вредност, на начин како је већ описано у четвртом поглављу. На тај начин, добијена је прва временска серија, за коју је, због тенденције смањења вредности иницијално посматране серије, почетна вредност постављена на одговарајућу нормализовану вредност. Ова серија се може посматрати као могућа реализација детерминистичке функције, уз присуство случајних флукуација, при чему детерминистичка функција представља решење нормализованог посматраног МСА система. Друга серија, одређена је тако су, унутар сваког квартала, идентификоване највеће и најниже месечне вредности. Након тога, вредности друге серије дефинисане су као просек ових екстремних вредности. Вредности обе посматране серије су израчунате на начин као што је претходно описано једнакошћу (4.33).

Поред нормализације у односу на највећу вредност низа, уведена је и адитивна константа, како би се обезбедили задати почетни услови. Коришћењем НРМ апроксимација

и одговарајуће трансформације добијене су оцене решења посматраног МСА система. За тако добијене серије дефинисане су мере грешке оцене: квадратна грешка оцене (MSEE) и фракциона грешка оцене (FSEE). У Табели 4-3 приказано је првих неколико MSEE и FSEE вредности НРМ апроксимација, које указују на квалитет апроксимација. Наиме, са повећањем реда апроксимације уочава се смањење вредности MSEE и FSEE, што указује на побољшање прецизности апроксимације. Као што је претходно показано, задовољавајуће оцене низова добијене су већ за апроксимације реда $k > 2$.

Резултати примене модела могу допринети детекцији аномалија у односу на претходно идентификоване трендове учесталости посматраних КД. Идентификоване аномалије могу указати на потребу за прилагођавањем, проширивањем или комбиновањем примене постојећих форензичко-инжењерских метода, као и за применом нових. Такође, могу представљати основу за прилагођавања расподеле расположивих ресурса или покретање поступака за набавку нових решења и система за подршку постојећим, односно увођењем нових форензичко-инжењерских метода. На основу добијених резултата, представљени модел се може применити и на друге категорије КД, укључујући дела која у истраживању нису разматрана, уз примену истих или различитих параметара модела. На тај начин може се допринети ефикасности оперативне форензичке праксе.

Развијени модел може бити примењен као подршка како анализи већ спроведених истрага тако и планирању и спровођењу будућих истрага. Њиховом применом могу се идентификовати аномалије и одступања од очекиваних образаца, детектовати пикови, односно периоди максималног оптерећења система, препознати трендови и допринети бољем разумевању динамике криминалних активности. На тај начин примена модела може допринети скраћењу времена трајања истраге, приоритизацији форензичких анализа и смањењу форензичке неизвесност. Резултати примене модела омогућавају квантификацију налаза, уместо њиховог квалитативног описивања, што може допринети повећању објективности и поузданости форензичких закључака. Примена модела омогућава и разматрање више хипотеза, чиме се ствара основа за идентификовање сценарија који, у оквиру задатих претпоставки и параметара, показује највећу вероватноћу. Што се може реализовати вишеструком и/или итеративном применом модела. При томе неопходно је нагласити да добијене вредности апроксимације, односно приближења решењима модела,

као и да посматране временске серије садрже стохастичку компоненту, чије је присуство и утицај потребно додатно истражити.

Динамичким праћењем развоја учесталости одређене категорије КД, односно поновљеном примена модела са промењеним параметрима, могу се реализовати различити сценарији и симулације. На основу резултата спроведених симулација могуће је добити додатне информације за усмеравање и планирање истражних активности у току спровођења истрага. Применом развијеног детерминистичког модела добијају се мерљиве пројекције очекиваног обима ангажовања форензичких ресурса, што може представљати основу за планирање рационализације расположивих ресурса и/или идентификовање потреба за унапређењем и повећањем капацитета за спровођење форензичко-инжењерских анализа. На овај начин ствара се могућност квантификацију оптерећења система, на основу које се могу проценити потребан број стручних лица и материјално-техничких капацитета, као оптимизовати њихово ангажовање током времена. Према добијеним резултатима и подацима приказаним у Табели 6-2, могу се извршити процене временског оквира потребног за примену форензичких метода.

Табела 6-2. Процена времена потребног за примену форензички метода према обиму у посматраном узорку (дани)

Чл. КЗ	Назив дела	Број КД (2015-2024)	Време обраде (дана)		Укупно (дана)		
			min	max	min	max	
203	Крађа	172.259	ДНК анализа	1	3	172.259	516.777
			Дактилоскопија	1	2	172.259	344.518
			Дигитална форензика	1	5	172.259	861.295
			Трасологија	1	5	172.259	861.295
204	Тешка крађа	128.480	ДНК анализа	1	3	128.480	385.440
			Дактилоскопија	1	2	128.480	256.960
			Дигитална форензика	1	5	128.480	642.400
			Трасологија	1	5	128.480	642.400
206	Разбојништво	12.526	ДНК анализа	1	3	12.526	37.578
			Дактилоскопија	1	2	12.526	25.052
			Дигитална форензика	1	5	12.526	62.630
			Трасологија	1	5	12.526	62.630
			Балистика	1	3	12.526	37.578

355	Фалсификова ње исправе	18.380	Анализа структуре и својстава материјала	1	3	18.380	55.140
			Дигитална форензика	1	5	18.380	91.900
			Графоскопија	1	5	18.380	91.900

Процене су дате у односу на учесталости одређених КД у посматраном узорку, при чему је јединица времена дан. На основу добијених процена може се даље извршити процена потребних форензичких ресурса и планирање њиховог коришћења кроз време. Капацитет система дефинишемо као

$$C = \sum_{i=1}^n N_i \cdot t_i,$$

где је N_i број случајева типа i , а t_i време обраде. Тако да уколико би, на пример, за свако дело тешке крађе постојали дактилоскопски подаци, које је потребно анализирати ради идентификације починиоца, процена је да би за њихову обраду било потребно од 128.480 до 256.960 сати, а у случају потребе за применом свих наведених метода од 513.920 до 1.927.200 сати. Капацитет система се може дефинисати и према ранговном распону потребног времена обраде имајући у виду да зависи од више фактора. На основу процењеног капацитета система и идентификације потребних ресурса:

$$R = \frac{\text{укупно време рада}}{\text{расположиво време по запосленом}}.$$

На основу идентификованих потреба за ресурсима може се одредити обим се обим форензичких анализа које је могуће спровести у расположивом временском оквиру са расположивим људских и материјално-техничким капацитетима. На основу резултата добијених моделом могу се квантификовати идентификоване потребе, што представља основу за даље разматрање, израду и доношење планова који могу обухватити и реорганизацију и оптимизацију ресурса, уколико се утврди постојање таквих потреба. МСА модел омогућава идентификацију критичних периода у којима постоји повећан ризик од интензивирања криминалних активности, што може допринети благовременом реаговању форензичких и других надлежних служби.

Поред указивања на структуру и очекиване трендове у подацима, примена детерминистичких (МСА) модела може допринети детекцији аномалија, пружању аналитичке подршке истрагама, ефикаснијем планирању и ангажовању ресурса, као и раној идентификацији потенцијалних ризика, итд. Највећа вредност примене развијеног модела, међутим, не огледа се нужно у његовој самосталној примени, већ у његовом садејству и интеграцији са другим аналитичким, статистичким и другим методама од интереса са форензичког аспекта.

6.3 ФОРЕНЗИЧКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА СТОХАСТИЧКИХ МОДЕЛА (2D-GSB и PAR)

Поред претходно описаних модела детерминистичког типа, разматране су и стохастичке карактеристике посматраних података о учесталостима евидентираних кривичних дела, представљених у облику временских серија. Имајући у виду сложеност динамике криминалних активности, појаву различитих облика криминала и са њима повезану потребу за спровођењем форензичких анализа, истражена је могућност њиховог моделовања нелинеарним стохастичко-динамичким моделима.

Стохастички модели, развијени у петом поглављу, омогућавају анализу случајних варијација и флуктуација у динамици криминалних активности. Добијени стохастички модел, назван 2D GSB модел, уводи пар латентних процеса синхронизованих заједничким, тзв. Бернулијевим индикатором шума, уз присуство дводимензионалних корелисаних иновација. Модел је примењен за анализу података о учесталостима одређених кривичних дела у посматраном узорку, а добијени резултати указују на постојање одређених образаца и карактеристика динамике посматраних облика криминалитета, посебно са аспекта њиховог значаја за форензичке анализе. С друге стране, QHU-PAR модел, такође развијен у овој студији, омогућава истраживање динамике пропорционалних података, дефинисаних унутар јединичног $(0,1)$ интервала. На тај начин, он је примењен у описивању флуктуација учешћа, тј. процентуалних удела одређених облика КД у односу на њихове максималне вредности, тј. броја почињених КД у одређеном временском раздобљу.

Посебно треба истаћи да полазну основу за изградњу стохастичких модела представља чињеница да се многи феномени манифестују кроз више међусобно зависних временских серија које делују истовремено. У нашем случају, то је разматрано на примеру крађе и тешке

крађе, као и различитих облика фалсификовања, чије временске динамике показују међусобну зависност и корелацију. При томе је од посебне важности узети у обзир чињеницу да на овакве, сродне облике криминалних активности могу деловати заједнички спољни фактори, који могу узроковати истовремене или блиско повезане промене у обе серије, док свака од њих истовремено задржава сопствену динамику и друга специфична својства.

6.3.1 Улога стохастичких модела у форензичкој анализи

Стохастички модели, развијени у петом поглављу, представљају природно проширење детерминистичког МСА модела, јер омогућавају укључивање случајних варијација и непредвидивих промена у динамици криминалних активности. За разлику од МСА модела, који описује основне структурне трендове, стохастички модели омогућавају регистрацију флукутација, детекцију наглих промена и анализу ризика и неизвесности, чиме могу допринети смањењу форензичке неизвесности.

Тако, рецимо, са аспекта практичне имплементације 2D-GSB процеса, спроведене су нумеричке симулације основних серија 2D-GSB модела, за које су израчунате претходно описане оцене и анализирана њихова ефикасност. Такође, на основу реалних података, представљена је примена 2D-GSB процеса у анализи динамике и емпиријских расподела укупног броја различитих облика кривичних дела у Републици Србији, односно на посматраном узорку података који се односе на КД чије расветљавање захтева значајно ангажовање форензичких ресурса. Добијени резултати, оба поступка оцене, указују на задовољавајуће перформансе за различите величине узорка, чак и за умерене величине узорака. Емпиријске средње вредности процењиваних параметара веома су близу њиховим стварним вредностима, док одговарајуће пристрасности остају мале и смањују се са повећањем величине узорка. Генерално, резултати потврђују теоријска својства 2D-GSB оцене и указују на могућност њихове практичне примене, у спровођењу мултиваријантне анализе временских серија.

Резултати добијени применом QNH-PAR(1) модела на нормализоване податке у посматраном узорку, потврђују да предложени оквир представља флексибилан и ефикасан алат за анализу динамике криминалитета, као ограниченог стохастичког процеса који показује различите дистрибутивне облике. Тако да примена PAR модела представља

квантитативни алат за праћење релативног интензитета криминала и процену динамике промена у структури криминалних активности, што су питања од значаја у савременом приступу форензичке интелигенције и форензичкој анализи криминала.

Са форензичког аспекта, стохастички модели се могу посматрати као алати за рано откривање аномалија, анализу нестабилности, као и идентификацију скривених образаца и зависности у криминалним активностима. На тај начин могу допринети идентификацији и процени потребе за спровођењем одговарајућих форензичких анализа, као и процени потребних ресурса за пружање одговарајућег форензичког одговора.

6.3.2 Форензичка интерпретација 2D-GSB модела

Како је већ истакнуто раније, 2D-GSB модел укључује заједнички индикатор режима, вођен прагом који је одређен на основу величине мултиваријантних иновација. На тај начин модел омогућава обухватање синхронизованих структурних промена и ефеката трајнијег режима унутар јединственог латентног оквира, уместо ослањања искључиво на линеарну зависност или на динамику засновану на волатилности, што је карактеристично за конвенционалне мултиваријантне спецификације.

Практичне перформансе 2D-GSB модела верификоване су његовом применом на реалне мултиваријантне временске серије које представљају учесталости изабраних, сродних категорија КД, узимајући у обзир њихову учесталост и потребу за применом форензичко-инжењерских метода у току спровођења истраге и расветљавања околности настанка и извршења КД. Добијени резултати указују на могућност превођења математичких резултата у оперативно релевантне закључке који могу бити од значаја за спровођење истраге, процену ризика од појаве одређених облика криминалних активности, и у складу са тим, планирање и предузимање одговарајућих мера и радњи на њиховој превенцији.

Од посебног значаја је чињеница да 2D-GSB модел омогућава истовремену анализу две међусобно повезане временске серије, које у овом случају представљају учесталости одређених криминалних активности, односно различитих типова КД. На тај начин ствара се основа за континуирано праћење њихове динамике и прилагођавање ангажовања форензичких ресурса, што је од посебног значаја за форензичку аналитику сложених криминалних појава.

6.3.2.1 Форензичка интерпретација флукуација и структурних прекида посматраних временским серијама

На основу претходно реченог, 2D-GSB модел може допринети квантитативној процени ризика, смањењу субјективности у процесу давању налаза и мишљења форензичара, као и квалитетнијој и аргументованој интерпретацији налаза. На тај начин, резултати добијени применом оваквог математичког модела могу допунити интуитивне и искуствене процене стручних лица и пружити додатну квантитативну основу за њихово образлагање коришћењем добијених математичких формализама.

Емпиријска примена 2D-GSB модела на подацима из посматраног узорка, омогућила је сагледавање и верификацију практичних перформанси предложеног модела. Модел је примењен на реалне мултиваријантне временске серије, које представљају учесталости одређених КД извршених на територији Републике Србије. Коришћени подаци представљају дневне учесталости извршења дела, у периоду од 01. јануара 2015. године до 31. децембром 2024. године, чиме су добијене временске серије дужине $n = 3653$. Овако изабране временске серије имају значајну заступљеност у односу на учесталост у посматраном периоду, као и према критеријуму идентификоване потребе за применом једне или више форензичко-инжењерских метода за расветљавање околности настанка и извршења дела, потребних за давање налаза и мишљења који се могу користити у даљим процесним поступцима пред судским органима. Серије су класификоване према званичном Кривичном закону Републике Србије, при чему биваријантне серије садрже податке о међусобно повезаним категоријама КД, као својим компонентама. Посматране су две биваријантне серије, означене као Серија А и Серија В. Серија А обухвата дела крађе и тешке крађе, док Серија В обухвата дела фалсификовање новца, хартија од вредности, фалсификовање и злоупотреба платних картица и фалсификовање докумената и други посебни случајеви фалсификовања докумената.

Уочене флукуације и дисконтинуитети у динамици серија (Слика 5-8) указују на присуство наглих промена у посматраним криминалним активностима. Истовремено, евидентна је интеркорелација између компоненти обе биваријантне серије, због чега је употреба синхронизованог механизма прага посебно погодна у овом контексту. Добијени резултати указују на то да заједнички спољни фактори, као што су промене политика, економски поремећаји или мере спровођења закона, могу истовремено утицати на повезане

категорије криминалних активности. Индикатор заједничког режима може се тумачити као погодан механизам за описивање координисаних скокова и структурних помака уочених у подацима. Треба напоменути да, иако посматране серије представљају дневни број извршених КД, предложени 2D-GSB модел није намењен директном моделовању простора посматрања дефинисаног бројем догађаја, већ обухватању основне заједничке динамике изражених флукуација и синхронизованих промена режима.

Применом модела на посматрани узорак, узимајући у обзир учесталости изабраних КД која могу захтевати примену једне или више форензичко-инжењерских метода, показано је да модел може допринети детекцији наглих скокова и структурних прекида у посматраним временским серијама. При томе, нагли скокови могу указивати на појаву серијских КД, што је у конкретном примеру размотрено на случају крађа и тешких крађа. Такви налази могу указати на потребу за адекватним одговором са аспекта примене форензичко-инжињерских метода. У овим случајевима изазов могу представљати како расположива материјално-техничка основа тако и број и структура стручних лица ангажованих на спровођењу форензичких анализа и давању налаза и мишљења. Уколико дође до значајног повећања обима захтева, може се јавити потреба за прерасподелом расположивих ресурса и одговарајућом реорганизацијом рада, како би се обезбедио адекватан форензички одговор. Благовремена идентификација оваквих промена може допринети правовременом и адекватном реаговању и других стручних служби.

Уколико се применом моделом идентификује дисконтинуитет, таква промена може указивати на промену у динамици или начина извршења КД, што може имплицирати и указивати на потребу преиспитивањем примењених метода форензичке идентификације или за комбинованом применом више форензичко-инжењерских метода. Повећана варијабилност у посматраним временским серијама може указивати на нестабилност система и представљати основу за прилагођавање начина реаговања стручних служби у таквим условима.

6.3.2.2 Корелациона структура између посматраних серија

Једна од најважнијих карактеристика 2D-GSB модела јесте могућност анализе зависности између различитих типова КД. За разлику од униваријантних приступа, дводимензионални GSB оквир омогућава заједничко моделовање повезаних категорија КД,

уз експлицитно узимање у обзир унакрсне зависност у њиховој екстремној динамици. Постојање статистички значајне зависности између различитих категорија КД може указати на њихову потенцијалну оперативну повезаност, што може бити од посебног значаја са форензичког аспекта.

С обзиром на то да посматране серије представљају број извршених КД и показују изражену хетерогеност и асиметрију, пре моделовања је примењена логаритамска трансформација, којом је стабилизована варијанса и смањена асиметрију, чиме је олакшана апроксимација процеса прираштаја Гаусовом мешовитом расподелом, како је претпостављено у 2D-GSB моделу. На тај начин добијене су трансформисане серије прираштаја, које су у већој мери усклађене са основном дистрибутивном структуром модела. На основу тога, даље је разматрана могућност примене 2D-GSB процеса као одговарајућег стохастичког модела. Добијене процене, приказане у Табели 5-6, показују стабилност и интерпретабилност, што ствара основу за даљу теоријску и емпиријску анализу различитих категорија КД, посебно оних, које захтевају примену форензичке аналитике.

Треба напоменути да вредности процењених параметара остају релативно стабилне и интерпретабилне у различитим методама оцене, што додатно потврђује адекватност предложеног оквира закључивања. Мале разлике између оцена добијених методом момената (МоМ) и методом емпиријске карактеристичне функције (ECF) остају у упоредивом распону и не доводе до промене укупног структурног тумачења резултата.

6.3.2.3 Форензички аспект дистрибутивна својства и ризика у анализи временских серија

Са интерпретативне перспективе, оцењени параметри пружају додатни увид у структурну динамику анализираних категорија криминала. За Серију А (крађа и тешка крађа), процењена вероватноћа сугерише да се координисане епизоде активирание шоком јављају у приближно 13% посматрања, што указује на понављајуће, али не и доминантне структурне флукуације које истовремено утичу на обе категорије КД. Насупрот томе, за Серију В (кривична дела повезана са фалсификовањем), процењене вероватноће се крећу између 0,13 и 0,16, што имплицира упоредиву учесталост координисаних поремећаја. Међутим, знатно виши процењени праг (приближно 1,3–1,5, у поређењу са 0,23–0,26 у

Серији А) указује да су потребне израженије величине иновација да би дошло до активације режима временских серија посматраних КД, везаних за крађе и дела повезаних са фалсификовањем. Ово сугерише да се, иако се синхронизоване промене јављају са сличном учесталостју у обе посматране категорије, интензитет шокова потребних за активирање таквих промена разликује, што може указати на потенцијално различите структурне обрасце осетљивости унутар посматраних категорија КД.

У циљу оцене емпиријске адекватност предложеног модела, спроведено је упоређивање спецификације 2D-GSB модела са стандардним референтним моделом векторске ауторегресије првог реда (VAR(1)). У Табели 5.7 приказани су одговарајући критеријуми логаритамске вероватноће (LogLik), Акаикеове и Бајесове информације (AIC и BIC), заједно са заједничком кореном средње квадратне грешке (RMSE) за оба модела и обе серије. Добијени резултати показују да 2D-GSB модел остварује већу вредности логаритамске веродостојности, као и ниже вредности информационих критеријума и мере одступања у односу на стандардну VAR(1) спецификацију. Такође, значајно је напоменути да предложени 2D-GSB модел укључује само четири параметра, у поређењу са седам параметара у VAR моделу. Наведени резултати указују на штедљивију параметарску структуру и побољшану способност моделовања процеса прираштаја, посебно у случају Серије А.

Расподела прираштаја садржи информације о интензитету и варијабилности промена. Анализа расподеле прираштаја (Слике 5-9 и 5-10) показује одступања од нормалне расподеле и присуство екстремних вредности, тј. наглашених „репова“ расподеле. Резултати примене модела могу указивати на појаву ретких, али интензивних догађаја, као и на периоде повећаног ризика, што може представљати основу за планирање и процену вршног оптерећења система који се користе за спровођење форензичко-инжењерских анализа. Идентификација постојања асиметрије у расподели може бити повезана са доминацијом одређеног категорија КД, што може представљати додатни критеријум за прилагођавање ангажовања ресурса и оптимизацију коришћење система потребних за спровођење форензичко-инжењерских анализа.

Као што је илустровано на Слици 5.9, репрезентација мешовите расподеле која лежи у основи прираштаја 2D-GSB модела пружа ближе поклапање са емпиријским подацима, посебно у погледу утврђивању повећане дисперзије и понашања „тежег репа“. Насупрот

томе, приказано је да једно-Гаусовска структура VAR(1) модела тежи да потцени вероватноћу појаве екстремних вредности. Генерално, визуелно поклапање између емпиријских хистограма и уклопљених густина мешовите расподеле додатно поткрепљује адекватност примене 2D-GSB оквира за моделовање синхронизоване динамике режима у посматраним подацима.

Присуство екстремних вредности у расподели прираштаја може указати на појаву неубичајених и потенцијално високоризичних криминалних активности, који могу захтевати додатну форензичку анализу, примену комбинованих метода форензичке анализе или разматрање примене нових метода форензичко-инжењерских метода.

6.3.3 Форензичка интерпретација QNH-PAR(1) модела

За разлику од конвенционалних модела временских серија са реалним вредностима, стохастички процеси дефинисани на јединичном интервалу поседују специфичне структурне карактеристике, укључујући ограничења вредности домена, граничне ефекте, асиметрично маргинално понашање и променљиву варијабилност у близини граница интервала. Упркос досадашњем напретку у овој области, и даље постоје одређена значајна ограничења, која се углавном односе на претпоставке о расподелама које имају ограничену флексибилност облика или наметање унапред одређеног смера асиметрије.

У пракси, емпиријски подаци ограничени на одређени интервал често показују изразито хетерогено дистрибуционо понашање, укључујући растуће или унимодалне густине, као и позитивну и негативну асиметрију. Поред тога, неки од постојећих модела захтевају рачунарски захтевне обраде или не поседују експлицитно дефинисане прелазне густине, што отежава оцену засновану на функцији веродостојности и интерпретацији резултата засновану на вероватноћи.

У форензичком контексту, њихова примена може имати значајну улогу у анализи и интерпретацији динамичких процеса, код којих се посматрају релативни показатељи, пропорције или нормализоване вредности. Са форензичког аспекта, QNH-PAR модел омогућава идентификацију и квантификацију временске зависности посматране појаве, односно процену у којој мери претходна стања система утичу на његово будуће понашање. Ова карактеристика може бити посебно значајна у анализама разних облика криминалитета,

пожара, еколошких инцидената, саобраћајних незгода и других појава које показују изражену временску повезаност.

У области криминалистичке аналитике, PAR модели могу бити коришћени за моделовање пропорционалног учешћа одређених врста кривичних дела у укупној стопи криминалитета. Параметар ауторегресије омогућава процену степена постојаности криминалних образаца кроз време, што може допринети идентификацији стабилних трендова, сезонских образаца или промена изазваних спољним факторима. На тај начин модел пружа квантитативну основу за процену да ли је уочена промена последица случајних осцилација или представља статистички значајну промену у обрасцу криминалног понашања.

Посебна предност PAR модела у форензичкој интерпретацији огледа се у томе што обезбеђује вероватносни оквир за процену неизвесности. За разлику од детерминистичких приступа, модел омогућава квантификацију случајних одступања и процену вероватноће различитих сценарија развоја посматране појаве. Тиме се смањује ниво субјективности у експертском закључивању и повећава транспарентност форензичке анализе. Додатни значај PAR модела произлази из могућности његове примене у предиктивној форензичкој аналитици. На основу историјских података могуће је проценити очекивано будуће кретање посматраног индикатора и идентификовати одступања од очекиваног обрасца понашања. Таква одступања могу представљати индикатор појаве нових фактора ризика, промена у криминалним активностима или других догађаја релевантних за форензичку истрагу.

Са становишта закључивања форензичара, резултати добијени применом PAR модела не представљају доказ сами по себи, већ додатни извор квантитативних информација који може подржати експертско мишљење. Њихова највећа вредност огледа се у објективизацији анализе, смањењу форензичке неизвесности и унапређењу научне утемељености закључака који се доносе на основу временски зависних података.

Због карактеристика PAR модела, као и добијених резултата у примени, PAR модели представљају користан аналитички алат за форензичку интерпретацију појава које се могу изразити кроз пропорције или релативне показатеље, омогућавајући истовремено анализу временске зависности, процену неизвесности и подршку доношењу стручних закључака заснованих на подацима. Резултати примене QHU-PAR(1) процеса потврђују његову

флексибилност и ефикасност у моделовању ограничених и асиметричних стохастичких појава.

6.3.3.1 Форензички значај ауторегресивне структуре

У анализама криминалитета, PAR моделима се омогућава испитивање временске динамике пропорционалног учешћа појединих врста кривичних дела у укупној структури криминалитета. Значајна ауторегресивност може указивати на континуитет криминалних активности, стабилност криминогених фактора или постојање трајних социјалних и просторних услова који погодују одређеним облицима криминалног понашања. На тај начин модел пружа статистичку основу за разликовање случајних варијација од систематских промена у структури криминалитета.

Параметар ауторегресије у QHU–PAR моделу има и значајну интерпретативну вредност. Он представља квантитативну меру степена зависности између узастопних посматрања. Форензички посматрано, овај параметар може се тумачити као показатељ стабилности посматране појаве и интензитета утицаја претходних догађаја на будуће стање система. Високе вредности параметра указују на снажну временску повезаност, док ниже вредности упућују на већу улогу случајних или спољашњих фактора.

Са аспекта форензичке науке, ауторегресивна структура QHU–PAR модела доприноси смањењу форензичке неизвесности јер омогућава објективно мерење временских зависности и процену вероватног будућег понашања система на основу историјских података. Због тога PAR модел може представљати значајан аналитички алат за подршку форензичком закључивању, процени ризика, идентификацији трендова и стратешком планирању форензичких ресурса.

У суштини, форензички значај ауторегресивне структуре QHU–PAR модела огледа се у њеној способности да открије и квантификује временску постојаност сложених појава, омогући поузданију интерпретацију динамичких процеса и обезбеди научно утемељену основу за доношење форензичких закључака.

6.3.3.2 Краткорочна предикција у QHU–PAR моделу и њен форензички значај

Једна од значајних карактеристика QHU–PAR модела јесте могућност краткорочног предвиђања будућих вредности посматране појаве на основу њених претходних стања.

Захваљујући ауторегресивној структури, модел користи информације садржане у историјским подацима како би проценио највероватније будуће вредности процеса, при чему се задржавају природна ограничења посматране величине.

Са форензичког становишта, краткорочна предикција нема за циљ предвиђање појединачних догађаја, већ процену очекиваног понашања система у блиској будућности. Такве процене могу представљати важан инструмент за препознавање одступања од уобичајених образаца, идентификацију нових фактора ризика и благовремено усмеравање истражних или превентивних активности.

Посебан форензички значај краткорочног предвиђања огледа се у могућности раног откривања аномалија. Наиме, прогнозиране вредности представљају референтни оквир очекиваног понашања система, док значајна одступања могу представљати индикаторе неуобичајених или потенцијално ризичних догађаја. На тај начин QNH–PAR модел може послужити као инструмент за подршку системима раног упозоравања и управљања ризицима.

Краткорочне прогнозе могу имати значај и у стратешком планирању форензичких ресурса. Процене будућних кретања одређених показатеља омогућавају рационалније планирање ангажовања стручних лица, техничких капацитета и превентивних активности, посебно у условима ограничених ресурса и повећане неизвесности.

Важно је нагласити да се форензичка вредност краткорочне предикције не огледа у сигурном предвиђању будућности, већ у квантификовању вероватног развоја посматране појаве и мерењу неизвесности таквих процена. Управо због тога QNH–PAR модел представља користан аналитички алат који доприноси објективизацији форензичких анализа, смањењу неизвесности и доношењу одлука заснованих на подацима.

6.4 АСПЕКТ ПРИМЕНЕ У ОБЛАСТИ ФОРЕНЗИЧКЕ ИНТЕЛИГЕНЦИЈЕ

Форензичка интелигенција, као пресек између криминалистике и форензике, разматра како знање из обе области може допринети бољем разумевању криминала и понудити нове правце у теорији и пракси, јер у ширем тумачењу, обавештајни подаци су тачан, благовремен и користан производ логичке обраде информација (Ribaux, и други, 2003).

Форензичка интелигенција повезује форензичке науке са обавештајним приступом, подржавајући концепт према којем се подаци и докази добијени применом форензичких

метода не користе искључиво за потребе судских поступака, већ и за оперативни рад, као и доношење одлука различитог ниво од оперативног до стратешког.

Основна разлика у односу на класични приступ форензици огледа се у томе што традиционална форензика првенствено има за циљ обезбеђивање доказа за потребе судских поступака, док форензичка интелигенција користи исте или са форензичким анализама повезане податке, али у сврху откривања образаца, повезаности и трендова у криминалним активностима. На тај начин овакав приступ може допринети организацији и спровођењу активности у домену превентивног и оперативног рада.

Овај концепт омогућава повезивање случајева, на пример, на основу ДНК података или балистичких података, чиме се могу идентификовати везе између различитих кривичних дела и указати на могућег починиоца или пак серијског починиоца. У овом концепту се појављује могућност да се на основу форензичких података може допринети идентификацији трендова, уочавању образаца, и у одређеном степену предвиђању развоја криминалних активности, што може представљати основу за превентивно деловање усмерено ка спречавању или смањењењу ризика од њиховог настанка. У том контексту, модели развијени у овом истраживању, чија је примена верификована на подацима из посматраног узорка, могу се довести у везу са концептом форензичке интелигенције. Њихова примена може допринети идентификацији трендова, анализи повезаности учесталости одређених категорија кривичних дела, откривању промена у њиховој динамици и идентификацији других образаца који могу бити од значаја за форензичку и криминалистичку аналитику.

Форензичка интелигенција може пружити значајну подршку спровођењу истрага, посебно имајући у виду могућност интегралног посматрања и анализе форензичких података у комбинацији са другим релевантним обавештајним информацијама. На тај начин доприноси се трансформацији форензике из претежно пасивног и реактивног концепта, у којем се применом научних метода и алата доприноси потврђивању или оспоравању доказа у судском поступку, у проактиван и стратешки оријентисан инструмент подршке у борби против криминала. Допринос се огледа и у интеграцији оперативног, тактичког и стратешког нивоа организационих структура, чиме се може унапредити координација активности и повећати ефикасности у борби против криминала.

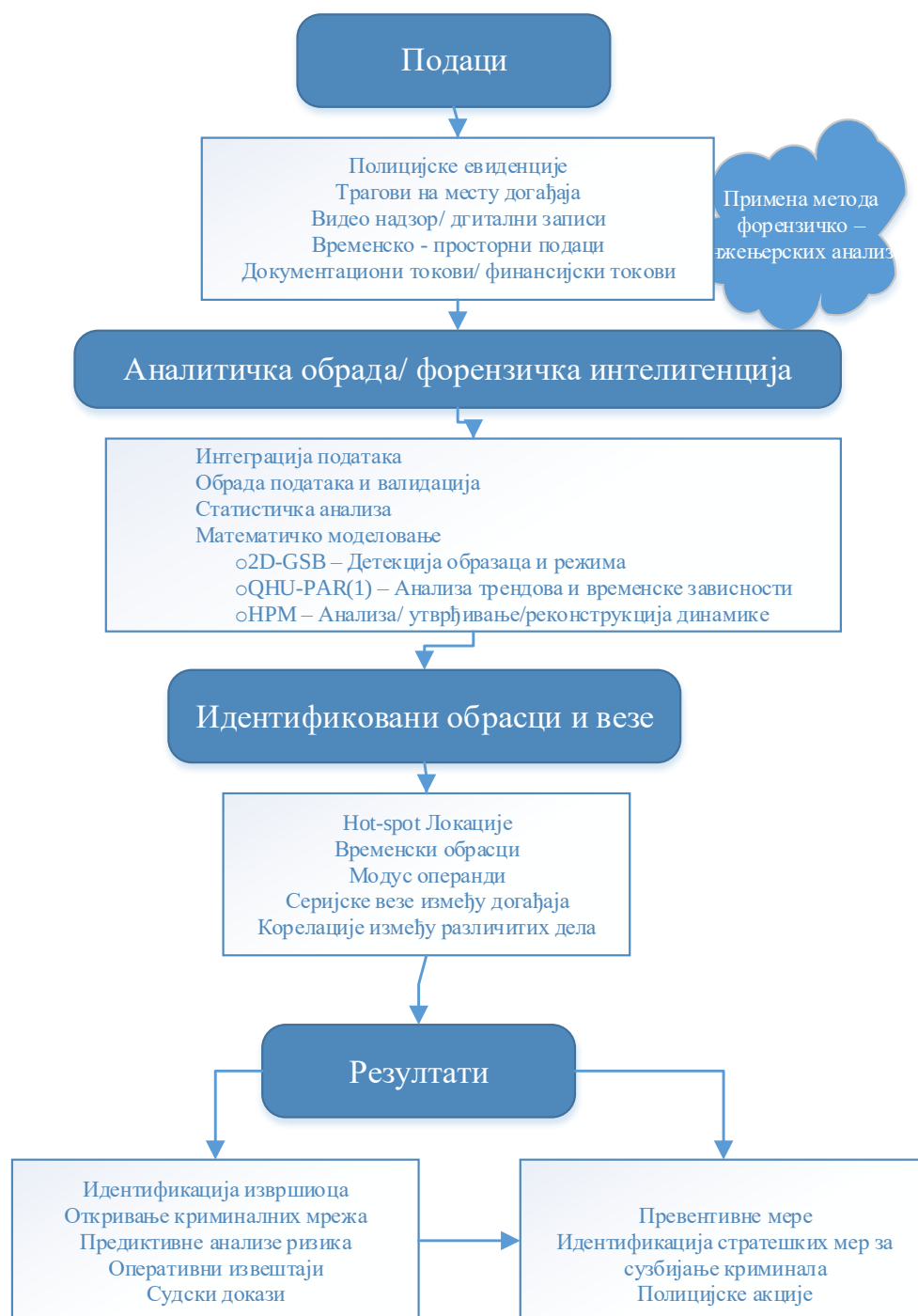
Основни методи и алати које користи форензичка интелигенција обухватају базе података, статистичке и математичке методе за откривање повезаности и образаца, географске информационе системе (ГИС) за просторну анализу, као и методе вештачке интелигенције и машинског учења за анализу великих скупова форензичких података у дигиталном облику.

Као у оквиру форензичке аналитике идентификација нестабилних режима МСА система може имати значај и у контексту форензичке интелигенције. Таква идентификација може имати оперативна значај, посебно у погледу раног откривања „hot spot“ зона, уочавања промена у криминалним мрежама, указивања на потребу за прерасподелу ресурса, увођењем додатних метода, унапређењем материјално техничке основе и потребу смањења форензичке неизвесности. Нестабилност МСА система указује на динамичке промене и повећању неизвесности у обрасцима криминалних активности, што захтева одговарајући одговор са аспекта форензичких анализа и ресурса. Оваквим приступом може се допринети раном упозоравању на ризике, оптимизацији форензичких ресурса, идентификацији потребних унапређења и увођењу додатних или нових форензичко-инжењерских метода у процесу анализе и генерисања налаза и мишљења за даљу употребу у судским процесима.

Развијени детерминистички модел може се, са аспекта форензичке интелигенције, применити на начин који омогућава интегралнији приступ анализи података из више извора, укључујући податке и материјал прикупљен на терену, податке обрађене у лабораторијама, као и податке који се налазе у базама података релевантних информационих система. Такав интегралан приступ може допринети унапређењу процеса одлучивања. У том контексту, у даљим истраживањима може се применити хибридни приступ који би, поред постојећих математичких и статистичких метода, укључио и методе вишекритеријумског одлучивања. На тај начин може се допринети унапређењу процеса одлучивања, као и подршци стручним лицима у избору одговарајућих метода анализа и формулисању налаза и мишљења у процесу истраге.

Форензичка интелигенција, као синергија форензике и обавештајног рада, омогућава проактиван приступ и повезивање свих нивоа, од оперативног до стратешког, рада надлежних служби. На тај начин може се рећи да смањити ризик од изолованог посматрања резултата форензичких анализа и њиховог недовољног коришћења. У истраживању су

развијени модели чија се примена у посматраном узорку може довести у везу са концептом форензичке интелигенције (Слика 6-2).



Слика 6-2. Приказ везе развијених модела и концепта форензичке интелигенције

Њихова примена представља потенцијалну основу за интеграцију математичког моделовања у систем форензичке и криминалистичке аналитике, са циљем унапређења идентификације трендова, препознавања промена и подршке процесу доношења одлука. Током спроведеног истраживања идентификована је потреба да се наставе истраживања усмерених на даљи развоја и разраду синергијског деловања форензике и полицијског рада. Посебно је значајно даља истраживања усмерити на однос форензичких наука и полицијског рада посредством форензичких обавештајних података, односно форензичке интелигенције, као и на даљу примену метода математичког моделовања у овом контексту. Оваква истраживања могу представљати основу за развој интегрисаних аналитичких модела који би повезивали форензичке податке, криминалистичку аналитику, математичко моделовање и методе подршке одлучивању.

Примена PAR модела може се посматрати као значајан аналитички алат форензичке интелигенције, јер омогућава прикупљање, анализу, интерпретацију и предвиђање образаца понашања форензички релевантних појава на основу временски зависних података. Његова вредност не произилази само из статистичког описивања података, већ и из способности да подржи доношење одлука, препознавање ризика и планирање активности заснованих на доказима.

У савременом схватању форензичке интелигенције, циљ није искључиво реконструкција већ насталих догађаја, већ и идентификација образаца, трендова и потенцијалних претњи који могу допринети превенцији и ефикаснијем управљању безбедносним ризицима. У том контексту, PAR модел представља средство за трансформацију историјских података у корисне аналитичке информације.

Посебан значај PAR модела огледа се у анализи временских серија које представљају пропорције, уделе, вероватноће или нормализоване индикаторе, што је чест случај у форензичкој пракси. Захваљујући ауторегресивној структури, PAR модел омогућава идентификацију скривених временских образаца и процену степена постојаности посматраних појава. Са становишта форензичке интелигенције, то омогућава препознавање дугорочних трендова, стабилних криминогених фактора и понављајућих механизма који утичу на настанак одређених догађаја.

Како је једна од функција форензичке интелигенције рано откривање аномалија, за шта примена PAR модела може дати значајан допринос. На основу процењеног очекиваног

понашања система, могуће је идентификовати значајна одступања од прогнозираних вредности, која пак могу указивати на појаву нових криминалних образаца, промену начина извршења кривичних дела, промене у окружењу које захтевају додатну форензичку анализу, итд.

Поред аналитичке функције, PAR модел се може посматрати и као инструмент предиктивне форензичке интелигенције. Краткорочне прогнозе добијене моделом могу послужити за процену будућих кретања посматраних показатеља и омогућити благовремено реаговање надлежних институција. На тај начин модел доприноси проактивном приступу безбедности и управљању ризицима.

Са аспекта управљања ресурсима, остварује се допринос планирању ангажовања форензичких експерата, оптимизацији коришћења техничких и лабораторијских капацитета, одређивање приоритета истражних активности; планирање превентивних мера и контрола, и слично. Очување ограниченог опсега вредности процеса доприноси реалистичнијим прогнозама, што може допринети поузданост аналитичких закључака у форензичким применама.

6.5 ПРИМЕНА У ФОРЕНЗИЧКОЈ ПРАКСИ

Предложени модели могу се применити у форензичкој пракси као подршка спровођењу истрага, како у контексту идентификације образаца тако и за анализу динамике догађаја. На основу резултата примене модела се може извршити процена ризика, идентификовати ризични периоди и дати процена вероватноће повећања стопе криминалитета.

Идентификација и процена динамике одређених криминалних активности може значајно допринети развоју предиктивне аналитике, унапређењу процеса доношења одлука и оптимизацији алокације ресурса у оквиру система безбедности и форензичких истрага. У том контексту, примена математичког моделовања омогућава формализацију сложених просторновременских образаца криминалног понашања, као и квантификацију неизвесности у процесу анализе. Посебан значај имају модели временских серија, као што су пропорционални ауторегресивни (PAR) модели, који омогућавају анализу трендова, сезоналности и интермитентности криминалних догађаја. Са друге стране, примена метода као што је хомотопоско-пертурбациона метода (HPM) омогућава решавање нелинеарних диференцијалних једначина које описују динамику криминалних процеса, укључујући

утицај различитих фактора ризика и спољашњих утицаја. Поред детерминистичког приступа, посебан значај имају стохастички модели који омогућавају моделовање случајности и неизвесности присутних у криминалним појавама.

Најзад, 2D-GSB модел омогућава анализу две међусобно повезане временске серије, у случају спроведеног истраживања, временске серије које представљају учесталости одређених криминалних активности, чиме се ствара могућност за активно праћење и прилагођавање ангажовања форензичких ресурса, што је од посебног значаја за давање адекватног и правовременог одговора са форензичког аспекта. Добијени резултати у спроведеном истраживању показују да предложени 2D-GSB оквир пружа флексибилну и практично релевантну репрезентацију синхронизоване динамике режима у корелисаним временским серијама, омогућавају анализу вероватноће настанка догађаја, транзицију између различитих стања криминалне активности, као и процену интензитета појављивања инцидената у времену и простору. Може се рећи да је развијени модел посебно погодан за анализу ретких и интермитентних догађаја, што је честа карактеристика криминалних активности. На тај начин, математичко моделовање не представља само аналитички алат, већ и кључну компоненту савремених система за подршку одлучивању у области превенције и сузбијања криминала.

Како је у динамичном реалном окружењу, са израженим степеном неизвесности у области предиктивне аналитике криминалитета, планирање ангажовања стручних лица за примену форензичких анализа евидентан изазов, резултати примењених математичких модела могу значајно допринети превазилажењу овог проблема и представљати поуздану основу за планирање ресурса. Планирање ресурса засновано на моделима добијеној процени обима и предикцији динамике криминалних активности може допринети идентификацији потребних кадровских капацитета, и то према броју, профилу и нивоу експертизе за примену форензичких метода, планирању и оптимизацији распореда ангажовања, планирању коришћења техничких и материјалних ресурса.

Овако конципирано планирање ресурса, засновано на резултатима математичког моделовања, омогућава повећање ефикасности форензичких анализа, рационалније коришћење капацитета и смањење форензичке неизвесности у процесу доношења одлука. Примена математичких модела у области анализе криминалитета и форензичке аналитике има значајан допринос стратешком планирању, јер омогућава систематично сагледавање

сложених појава, идентификацију трендова и доношење одлука заснованих на подацима. За разлику од традиционалних приступа који се у већој мери ослањају на ретроспективну анализу и експертску процену, математичко моделовање омогућава проактиван приступ кроз предвиђање будућних образаца и потенцијалних ризика.

Применом модела временских серија, просторновременских модела и стохастичких приступа могуће је анализирати динамику криминалних активности, идентификовати жаришта, проценити вероватноћу појаве одређених догађаја и препознати обрасце који нису непосредно уочљиви класичном анализом. На тај начин, добијени резултати представљају основу за формулисање дугорочних стратегија превенције, контроле и сузбијања криминалитета.

Посебан допринос огледа се у оптимизацији алокације ресурса, јер модели омогућавају процену будућних потреба за кадровским, техничким и финансијским капацитетима. То укључује планирање ангажовања форензичких стручњака, развој лабораторијских капацитета, набавку опреме и приоритизацију инвестиција у складу са процењеним ризицима и оперативним захтевима. У стратешком контексту, примена математичког моделовања доприноси и развоју сценаријског планирања, симулацији различитих оперативних услова и процени ефеката потенцијалних интервенција. Ово омогућава институцијама да благовремено прилагоде стратегије и повећају отпорност система на промене у динамици криминалних активности. На тај начин, може се закључити да примена математичких модела представља значајну подршку стратешком планирању, јер обезбеђује аналитичку основу за рационалније управљање ресурсима, повећање ефикасности система и унапређење способности предвиђања и реаговања у области безбедности и форензичких истрага.

6.6 ОГРАНИЧЕЊА И ДАЉИ ПРАВЦИ

Примена математичких модела неизбежно подразумева одређени степен поједностављења реалности, како би се омогућило испитивање специфичних својстава система и извођење закључака у дефинисаном контексту. Међутим, ова редукција сложености може довести до занемаривања релевантних фактора, интеракција и нелинеарних зависности које постоје у реалним процесима, посебно у области криминалних активности и форензичке аналитике. Једно од кључних ограничења односи се на зависност

модела од квалитета улазних података. Поред тога, примена модела подразумева одређене претпоставке, које у пракси често не могу бити у потпуности испуњене.

Прецизније, примена детерминистичких модела често не даје адекватан опис стохастичке природе реалних система, док стохастички модели, иако флексибилнији, захтевају прецизну процену вероватноћа и дистрибуција, што може бити ограничено доступношћу података. Процеси који се моделују могу се посматрати кроз неколико зависних временских серија које делују заједно и које су под утицајем заједничких спољних фактора, могу изазвати промене изражене у више серија, док свака задржава своју динамику и унутрашња структурна својства. Предложени 2D-GSB модел, омогућава моделовање синхронизованих процеса у две серије уз претпоставку нормалне расподеле иновација, представља искорак у простор моделовања више зависних временских серија. Добијени резултати отварају неколико праваца за даља истраживања на повезаним биваријантним моделима, односно предложени модел би се могао даље генерализовати, дозвољавањем елиптичних или стабилних дистрибуција иновација.

Ограничења се генерално могу посматрати кроз претпоставке везане за процес на који се примењују стохастички модели, као што су: стационарност процеса, ергодичност, одређена расподела случајних иновација, независност или условна независност случајних компоненти, константност одређених параметара, рачунски ефикасних процедура оцењивања и сл. Односно, уколико реални процес значајно одступа од ових претпоставки, модел може давати непоуздане процене, тако да је потребно даље истраживати начине за превазилажење ових ограничења. Динамички однос различитих, специфичних облика криминалитета у односу на општу стопу криминалних активности представља проблемски простор, у коме је примењен стохастичко-динамички модел, заснован на тзв. јединичним расподелама вероватноћа QHU-PAR(1) модел. Једно од значајних ограничења је чињеница да резултати зависе од изабране условне расподеле, као и претпоставку да је за процену условне динамике довољна једна претходна вредност процеса, тако да предмет даљег истраживања може бити усмерен ка повезивању садашње вредности процеса са више претходних, као и укључивању временски променљивих параметара.

Проблеми прилагођавања и валидације модела такође представљају значајан изазов, посебно у динамичким и комплексним системима. Ограничење се може односити и на генерализацију резултата, јер модел развијен за специфичан контекст не мора бити

директно применљив у другим условима без додатног прилагођавања. Поред тога, повећање сложености модела, иако може побољшати тачност, често доводи до смањења интерпретабилности, што је посебно важно у форензичком контексту где је неопходна јасна и аргументована експертска интерпретација.

Додатно, ефикасност и поузданост примене математичких модела у анализи криминалних активности у великој мери зависе од квалитета расположивих података. Квалитет података, који обухвата тачност, потпуност, конзистентност, релевантност и временску ажурност, представља кључни предуслов за адекватну параметризацију модела и валидност добијених резултата. У условима непотпуних или неодговарајућих података, чак и најсофистициранији модели могу довести до погрешних закључака и неадекватних одлука. Код детерминистичких модела, као што су диференцијалне једначине решавање применом хомотопско-пертурбационе методе (HPM), грешке у улазним параметрима могу се директно пренети на решења, што може довести до систематских одступања. Са друге стране, стохастички модели, омогућавају експлицитно моделовање неизвесности, али су и даље осетљиви на квалитет процена, које зависе од репрезентативности узорка.

Недостаци у подацима, укључујући недостајуће вредности, структурне прекиде и неконзистентности у прикупљању података, могу нарушити идентификацију трендова и сезоналности, што директно утиче на тачност предикције. Зато је обезбеђивање високог квалитета података, кроз стандардизацију процедура прикупљања, валидацију и континуирано ажурирање база података, од суштинског значаја за успешну примену математичких модела у форензичкој аналитици и предиктивном моделирању криминалних активности. У супротном, постоји ризик од повећања форензичке неизвесности и доношења неадекватних оперативних и стратешких одлука.

Даља истраживања могу бити усмерена на смањење утицаја идентификованих ограничења прилагођавањем добијених модела конкретним контекстима примене, уз одговарајућу интерпретацију коју захтева форензички приступ. Истраживањем је показано да се више различитих приступа може применити у посматраном контексту, тако са се хибридни приступ може окарактерисати као методолошки оквир заснован на интеграцији комплементарних модела, који доприносе интерпретабилности резултата уз редукцију форензичке неизвесности.

Такође, даља истраживања могу бити усмерена и на интеграцију са методама вишекритеријумског одлучивања (МСА), као што су АНР и Fuzzy АНР. Ове методе се могу применити на добијене резултате и омогућити систематска евалуација алтернатива и приоритизација активности у условима вишеструких и често супротстављених критеријума. Комбиновањем ових приступа, могуће је даља истраживања усмерити ка развоју хибридних модела, који подржавају форензичку интелигенцију, смањују ниво форензичке неизвесности и повећавају поузданост експертских закључака.

7. ЗАКЉУЧАК

На основу резултата спроведеног истраживања може се закључити да математички модели могу допринети процесима анализе, закључивања и доношења одлука у форензичком домену, посебно у погледу смањења неизвесности, као и унапређењу организације рада и оптимизације коришћења ресурса. Резултати добијени у овом истраживању доприносе побољшавају свеобухватног разумевања динамике криминала, унапређењу ефикасности примене метода форензичког инжењерства, као и оптимизацији ресурса за њихово спровођење. На тај начин се остварује и допринос ефикасности спровођења истрага, а самим тим и допринос смањењу безбедносних ризика. Додатни допринос се огледа у оптимизацији коришћења ресурса, смањењу потрошње материјала и времена ангажовања, чиме се омогућава убрзање процеса истрага. Из тих разлога, резултати истраживања дају допринос установљавању законитости, међусобне условљености и сагледавању динамичких особина одређених кривичних дела.

Кроз статистичку анализу података о криминалним активностима у посматраном узорку истраживана је динамика различитих облика криминалитета. Анализирани су постојећи модели и методе, али предложени и нови математички модели, помоћу којих се може обухватити динамика различитих облика кривичних дела. Детерминистички модели проширени су стохастичким алтернативама, како би се на адекватнији начин обухватиле случајне варијације у динамици настанка и извршења кривичних дела и последично допринело смањењу форензичке неизвесности у спровођењу истрага. Оцена вредности параметара модела извршена је на основу података о криминалитету, уз поређење перформанси различитих модела. Валидности предложених модела додатно је испитана кроз нумеричке симулације и анализу стабилности модела.

Кроз избор адекватних модела извршено је испитивање њихових могућности за предикцију различитих облика криминалног деловања, изабраних према учесталости дешавања и потреби за применом форензичко-инжењерских анализа, спроведено упоређивање на стварним, реалним подацима. Комбинацијом теоријских математичких технике са емпиријским подацима, потврђене су такође све полазне хипотезе, што представља истовремено потврђује и повећава применљивост добијених резултата у пракси.

У дисертацији је описан оригинални начин примене НРМ-а у решавању МСА модела, укључујући испитивање стабилности, егзистенције и јединствености решења МСА модела. Конвергенција НРМ апроксимација ка тачним решењима МСА система је формално доказана и верификована решавањем са различитим граничним условима. Представљена је и практична примена НРМ поступка у апроксимацији података о динамици изабраних кривичних дела у посматраном узорку која су од интереса са аспекта примене метода форензичког инжењерства.

На основу добијених резултата може се закључити да је предложена НРМ процедура адекватан алат за приближно решавање МСА модела. Примена овако добијених модела може такође бити усмерена ка формирању и развоју система за подршку спровођења форензичких анализа и идентификацији потенцијалних образаца и трендова, који могу бити употребљени за оптимизацију коришћења ресурса за смањење ризика од настанка криминалних активности, као и за оптимизацију и управљање техничким и технолошким форензичким ресурсима потребних за њихово откривање.

У контексту описивања и анализе динамике криминалитета, стохастички модели омогућавају да се идентификују и квантификују случајна одступања од уочених трендова, што је од посебне важности за предикцију и рано откривање ризика и планирање одговарајућег одговора са форензичког аспекта.

У тези је описан теоретски и потврђен практично нови дводимензионални GSB модел за моделовање мултиваријантних стохастичких процеса карактерисаних повременим променама режима и израженом зависношћу посматраних временских серија. Предложени модел проширује униваријантну GSB конструкцију увођењем заједничке динамике вођене прагом. Теоријски резултати утврђују експлицитне облике карактеристичних функција дистрибуције главних компоненти 2D-GSB процеса уз јасно диференцирање стационарне и нестационарне компоненте. Уведен је јединствен приступ процене параметара, комбинацијом методе засноване на моментима и карактеристичним функцијама. Обвакав приступ показао се адекватним за примену на коначним узорцима.

На основу добијених резултата може се закључити да предложени 2D-GSB модел пружа флексибилну и релевантну репрезентацију синхронизоване динамике режима у корелисаним временским серијама. Тест перформанси, указује на знатно побољшано дистрибутивно уклапање, уз очување штедљиве структуре параметара. Ови налази, заједно

са приказаним теоријским резултатима, представљају основу за даљу примену 2D-GSB процеса у моделовању мултиваријантних временских серија које карактерише понашање зависно од режима и карактеристике са тешким реповима.

Нови QHU-PAR(1) модел, представља ограничени ауторегресивни модел заснован на квази-Линдлијевој полулогистичкој јединичној расподели. Практична примена испитана је у односу на нормализоване временске серије, које представљају учесталост одређених облика криминала, који захтевају значајну примену метора форензичког инжењерства показала је да QHU-PAR(1) модел представља флексибилан и ефикасан алат за анализу ограничених стохастичких процеса који показују различите дистрибутивне облике. Даља истраживања могу бити усмерена на разматрање проширења вишег реда, мултиваријантне формулације и примене на друге класе ограничених временских серија. Може се закључити да примена овог модела представља квантитативни алат за праћење динамике и интензитета криминалних активности и процену временских промена у структури криминалних активности, што су питања од значаја у савременом приступу форензичке интелигенције и форензичкој анализи криминала.

Добијени резултати имплицитно потврђују постављен хипотетички оквир, омогућавајући разумевање унутрашње структуре и механизма који условљавају појаву и развој криминалних активности, формализације основних закона еволуције криминалних активности. На тај начин, детерминистички модели динамике криминалитета пружају могућност анализе стабилности, идентификације критичних тачака и симулације дугорочних трендова у променама различитих облика криминалног деловања, а посебно оних која захтевају примену метода форензичког инжењерства.

Комбинација детерминистичког и стохастичког приступа пружа најпотпунији оквир за анализу криминалних активности. Детерминистички модели омогућавају да се препознају основне структурне закономерности и дугорочни обрасци, док стохастички модели омогућавају да се узму у обзир случајне компоненте и непредвидиве појаве. На тај начин, интеграцијом ова два приступа гради се аналитички модел који истовремено описује основне трендове и насумична одступања, што обезбеђује поузданију основу за разумевање, предикцију и превенцију криминалитета. Комбинацијом детерминистичких и стохастичких модела добија се интегрисани аналитички оквир којим се могу детектовати структурни трендови и идентификовати случајне варијације, а овим приступом остварити

потпунија анализа и остварити већа поузданост у давању налаза и мишљења да форензичког аспекта.

Спроведеним истраживањем поред имплицитне везе са традиционалним приступом примене форензичко-инжењерских метода и доприноса у односу на то што на основу добијених резултата могу планирати и оптимизовати активности везане за пружање доказа у поступцима који се воде на суду (нпр. да ли траг са лица места, ДНК узорак, дактилоскопски податак, снимак са сигурносних камера припада осумњиченом), остварује се и допринос сагласан са основним принципима форензичке интелигенције, која користи исте податке, али у сврху откривања образаца, мрежа и трендова у криминалним активностима, доприносећи организацији и спровођење активности у домену превентивног и оперативног рада.

Предложени математичко-стохастички модели представљају значајан корак ка интеграцији квантитативних метода у форензичку анализу криминалних активности. Њихова примена омогућава не само боље разумевање динамике криминала, већ и развој алата за подршку одлучивању, чиме се унапређује ефикасност форензичких поступака, смањује форензичка неизвесност и доприноси превенцији криминалитета.

У ширем смислу, примена представљених модела доприноси објективизацији аналитичких процена, смањењу форензичке неизвесности, откривању временских образаца и трендова, идентификацији аномалија и потенцијалних претњи, подршци предиктивној анализи и стратешком планирању и доношењу одлука заснованих на подацима у форензичкој пракси. Добијени резултати могу допринети побољшању организације рада форензичких стручних служби, пре свега у доношењу одлука о ангажовању, припреми, планирању и идентификацији потребних ресурса, укључујући материјално техничка средстава и алате потребне за спровођење ефикасне форензичке анализе у спровођењу истрага.

8. ЛИТЕРАТУРА

- "Службени гласник РС", бр. 72/11, 101/11, 121/12, 32/13, 45/13, 55/14, 35/19, 27/21 - УС, 62/21 - УС (Законик о кривичном поступку).
- "Службени гласник РС", бр. 85/05, 88/05 - исправка, 107/05 - исправка, 72/09, 111/09, 121/12, 104/13, 108/14, 94/16, 35/19, 94/24 (Кривични законик).
- Adamu, G., Bawa, M., Jiya, M., & Chado, U. (2017). A Mathematical Model for the Dynamics of Zika Virus Via Homotopy Perturbation Method. *Journal of Applied Sciences and Environmental Management*, 21(4), 615–623.
- Adamy, J. (2022). *Nonlinear Systems and Controls*. Springer Berlin Heidelberg.
- Aknouche, A., & Dimitrakopoulos, S. (2023). Autoregressive Conditional Proportion: A Multiplicative-Error Model for (0, 1)-Valued Time Series. *J. Time Ser. Anal.*, 44(4), 393-417.
- Alanzi, A. R., Rafique, M. Q., Tahir, M. H., Sami, W., & Jamal, F. (2022). A New Modified Kumaraswamy Distribution: Actuarial Measures and Applications. *Journal of Mathematics*, 4288286. doi:<https://doi.org/10.1155/2022/4288286>
- Armanini Stefanan, A., Sagrillo, M., Palm, B., & Bayer, F. (2025). Modified Kumaraswamy Seasonal Autoregressive Moving Average Models with Exogenous Regressors for Double-Bounded Hydro-Environmental Data. *PLOS ONE*, 20(5), e0324721.
- Azuaba, E., Oluwafemi, T. J., Akinwande, N. I., Bako, D., & Dayap, J. (2022). Solution of Substance Abuse and Domestic Violence Mathematical Model Using Homotopy Perturbation Method. *International Journal of Mathematical Analysis and Modelling*, 5(2), 99-1.
- Bakouch, H. и сар. (2023). Unit Exponential Probability Distribution: Characterization and Applications in Environmental and Engineering Data Modeling. *Mathematics*, 11(19), 4207. doi:<https://doi.org/10.3390/math11194207>
- Bayer, F., Cintra, R., & Cribari-Neto, F. (2018). Beta Seasonal Autoregressive Moving Average Models. *J. Stat. Comput. Simul.*, 88(15), 2961-2981.
- Bayer, F., Rosa, C., & Cribari-Neto, F. (2025). A Novel Data-Driven Dynamic Model for Inflated Doubly-Bounded Hydro-Environmental Time Series. *Appl. Math. Modell.*, 137, 115680.

- Bayer, F.M.; Bayer, D.M.; Pumi, G. (2017). Kumaraswamy Autoregressive Moving Average Models for Double Bounded Environmental Data. *J. Hydrol.*, 555, 385-396.
- Billingsley, P. (1999). *Convergence of Probability Measures*, . John Wiley & Sons: New York, USA.
- Bisaglia, L., & Gerolimetto, M. (2008). An empirical strategy to detect spurious effects in long memory and occasional-break processes. *Commun. Stat. Simul. Comput*, 38(1), 172-189. doi:10.1080/03610910802446977
- Bisaglia, L., & Gerolimetto, M. (2008). Forecasting long memory time series when occasional breaks occur. 2008, 98(3),. *Econ. Lett.*, 98(3), 253-258. doi:https://doi.org/10.1016/j.econlet.2007.05.001
- Bodziak, W. (2000). *Footwear Impression Evidence: Detection, Recovery and Examination*, 2nd Edition. Boca Raton, Florida.: CRC Press.
- Bonat, W.H. и cap. (2019). Flexible Quasi-Beta Regression Models for Continuous Bounded Data. *Statistical Modeling*, 19, 617–633.
- Byrd, R., Lu, P., Nocedal, J., & Zhu, Z. (1995). A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization,. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16, 1190-1208.
- Bakouch, H. и cap. (2023). Unit Exponential Probability Distribution: Characterization and Applications in Environmental and Engineering Data Modeling. *Mathematics*, 11(9), 4207. doi:https://doi.org/10.3390/math11194207
- Carper, K. (2001). *Forensic Engineering*. . USA: CRC Press.
- Chesneau, C. (2024). Negation-Type Unit Distributions: Concept, Theory and Examples. . *Mathematica Pannonica*, 30_NS4. doi:10.1556/314.2024.00018.
- Cuesta-Albertos, J. A., Fraiman, R., & Ransford, T. (2007). A Sharp Form of the Cramér–Wold Theorem. *J. Theor. Probab.*, 20(2), 201-209.
- D’Angelo, N., Payares, D., Adelfio, G., & Mateu, J. (2022). Self-exciting point process modelling of crimes on linear networks. *Statistical Modelling*, 24(2), 139-168. doi:10.1177/1471082X221094146
- Décary-Hétu, D., Delémont, O., & Mulone, M. (2017). *The Routledge international handbook of forensic intelligence and criminology*. Q. Rossy (Ed.). Abingdon, Oxon, UK: Routledge.

- Dendramis, Y., Kapetanios, G., & Tzavalis, E. (2014). Level Shifts in Stock Returns Driven by Large Shocks. *Journal of Empirical Finance*, 29, 41-51. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2014.04.001>
- Dendramis, Y., Kapetanios, G., & Tzavalis, E. (2015). Shifts in Volatility Driven by Large Stock Market Shocks. *J. Econom. Dynam. Control*, 55, 130–147.
- Devlin, C., Morelato, M., & Baechler, S. (2024). Forensic intelligence: Expanding the potential of forensic document examination. *WIREs Forensic Science*, 6(5), e1528. doi:<https://doi.org/10.1002/wfs2.1528>
- Dey, S., Mazucheli, J., & Nadarajah, S. (2018). Kumaraswamy Distribution: Different Methods of Estimation. *Comp. Appl. Math.*, 37, 2094–2111.
- Douc, R., Moulines, E., Priouret, P., & Soulier, P. (2018). *Ergodic Theory for Markov Chains. In Markov Chains; Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*. Cham, Switzerland: Springer.
- Engle, R. F., & Smith, A. D. (1999). Stochastic Permanent Breaks. *The Review of Economics and Statistics* 81, 553-574.
- Enow, S. (2005). Modelling Financial Time Series with Threshold Nonlinearity,. *Int. J. Res. Bus. Soc. Sci.*, 14(8), 152-156. doi:10.20525/ijrbs.v14i8.4540
- Falaye, A. и cap. (2017). Quantitative Model for Dynamic Propagation and Countermeasure of Malicious Cyber Attack on the Mobile Wireless Network. *Intelligent Systems IEEE Conference (IntelliSys)*, (pp. 1095-1102).
- Ferrari, S., & Cribari-Neto, F. (2004). Beta Regression for Modelling Rates and Proportions. *J. Appl. Stat.*, 31(7), 799–815.
- Fuller, W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*. New York: John Wiley & Sons.
- Gallegos-Herrada, M., Ledvinka, D., & Rosenthal, J. (2024). Equivalences of Geometric Ergodicity of Markov Chains. *J. Theor. Probab.*, 37, 1230--1256.
- Gao, X., Sitharam, M., & Roitberg, A. (2019). Bounds on the Jensen Gap, and Implications for Mean-Concentrated Distributions. *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, 16(2), 1-16.
- Gecioglu, B. (2025). Mathematics and its Applications in Forensics: Case Studies and Analytical Approaches. *Glob J Medical Clin Case Rep*, 170-176. Retrieved from <https://dx.doi.org/10.17352/2455-5282.000221>

- Ghasemi, Y. (2021). *Agent-based model simulation for police deployment decision-making in patrol operations*, *Dissertations*. 183. (Industrial, Manufacturing, and Systems Engineering ed.). Retrieved from https://mavmatrix.uta.edu/industrialmanusys_dissertations/183
- Ghotbi, A., Mohammadzade, M., Avaei, A., & Keyvanipoor, M. (2007). A New Approach to Solve Nonlinear Partial Differential Equations. *Journal of Mathematics and Statistics*, 3(4).
- Giner, G., & Smyth, G. (2016). Statmod: Probability Calculations for the Inverse Gaussian Distribution. *R Journal* , 8(1), 339-351. doi:10.32614/RJ-2016-024
- Gonzalo, J., & Martinez, O. (2006). Large shocks vs. small shocks. (Or does size matter? May be so.). *Journal of Econometrics*, 135(1-2), 311–347. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2005.07.022>
- Gross, L. (2013). *Tests for Normality*. Available online: R Package Version 1.0-2. Retrieved 6 2, 2026, from <http://CRAN.R-project.org/package=nortest>
- Gross, J., & Ligges, Y. (2026, January 3). *CRAN.R-project.org*. Retrieved from Nortest: Tests for Normality. R package version 1.0-4, 2015. (accessed on 3 2026): <http://CRAN.R-project.org/package=nortest>
- Hamilton, D. J. (1994). *Time Series Analysis*. New Jersey,: Princeton University Press.
- Hassan, S. A., Abdalla, G. S., Faal, A., & Saudi, A. (2025). Novel Unit Distribution for Enhanced Modeling Capabilities: Healthcare and Geological Applications. *Engineering Reports* 7, 70, e70277. doi:<https://doi.org/10.1002/eng2.70277>
- He, C. H., & El-Dib, Y. O. (2022). A Heuristic Review on the Homotopy Perturbation Method for Non-Conservative Oscillators . *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 41(2), 572-603. doi:10.1177/14613484211059264
- He, J.-H. (1999). Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187(3-4), 257–262.
- He, J.-H. (2000). A Coupling Method of a Homotopy Technique and a Perturbation Technique for Non-Linear Problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 35(1), 37– 43.
- He, J.-H. (2003). Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and Computation*, 135(1), 73-79. doi:10.1016/s0096-3003(01)00312-5
- He, J.-H. (2006). Homotopy perturbation method for solving boundary value problems. *Physics Letters A*, 350(1-2), 87-88.

- He, J.-H. (2008). Recent development of the homotopy perturbation method. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 31(2), 205-209.
- Hirsch, M., Smale, S., & Devaney, R. (2012). Discrete dynamical systems. In: Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. *Academic Press*.
- Hoeffding, W., & Robbins, H. (1948). The central limit theorem for dependent random variables. *Duke Math. J.*, 15(3), 773-780.
- Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2013). *Matrix Analysis*, 2nd ed.; Cambridge University Press: Cambridge, UK.
- Huang, B.-N., & Fok, R. C. (2001). Stock market integration - an application of the stochastic permanent breaks model. *Applied Economics Letters*, 8(11), 725-729. doi:<https://doi.org/10.1080/135048500110036337>
- Jones, G. (2004). On the Markov Chain Central Limit Theorem. *Prob. Surv.*, 1, 299-320.
- Kachiashvili, K., & Melikdzhanjan, D. (2019). Estimators of the Parameters of Beta Distribution. *Sankhya B*, 81, 350-373.
- Khan, M., Farasat Saddiq, S., Khan, S., Islam, S., & Ahmad, F. (2014). Application of homotopy perturbation method to an SIR epidemic model. *Journal of Applied Environmental and Biological Sciences*, 4, 49-54.
- Khan, N., & Khan, A. A. (2018). Bayesian Analysis of Topp-Leone Generalized Exponential Distribution. *Austrian Journal of Statistics*, 47(4), 1-15. doi:<https://doi.org/10.17713/ajs.v47i4.716>
- Kieschnick, R., & McCullough, B. (2003). Regression Analysis of Variates Observed on (0,1): Percentages, Proportions and Fractions. *Stat. Modell.*, 3, 193-213.
- Knight, J., & Yu, J. (2002). Empirical Characteristic Function in Time Series Estimation. *Econom. Theory*, 18, 691-721.
- Korkmaz, M. Ç., & Korkmaz, Z. S. (2021). The unit log-log distribution: a new unit distribution with alternative quantile regression modeling and educational measurements applications. *Journal of Applied Statistics*, 50(4), 889-908. doi: <https://doi.org/10.1080>
- Korkmaz, M. Ç., Leiva, V., & Martin-Barreiro, C. (2023). The Continuous Bernoulli Distribution: Mathematical Characterization, Fractile Regression, Computational Simulations, and Applications. *Fractal and Fractional*, 7(5), 386. doi:<https://doi.org/10.3390/fra>

- Kotchoni, R. (2012). Applications of the Characteristic Function-Based Continuum GMM in Finance. *Comput. Stat. Data Anal.*, 56, 3599–3622.
- Lacey, A., & Tsardakas, M. (2016). A mathematical model of serious and minor criminal activity. *European Journal of Applied Mathematics*, 27(3), 403-421. doi:10.1017/
- Lawrence, A. J., & Lewis, P. A. (1992). Reversed Residuals in Autoregressive Time Series Analysis. *Journal of Time Series Analysis*, 13, 253-266.
- Lee, S., Noh, Y., & Chung, Y. (2017). Inverted exponentiated Weibull distribution with applications to lifetime data. *CSAM* , 24, 227-240. doi: <https://doi.org/10.5351/CSAM.2017.24.3.227>
- Leiva, V., Mazucheli, J., & Alves, B. (2023). A Novel Regression Model for Fractiles: Formulation, Computational Aspects, and Applications to Medical Data. *Fractal and Fractional*, 7(2), 169. doi:<https://doi.org/10.3390/fractalfract7020169>
- Li, B., & Babu, G. (2019). *Asymptotic Theory for Maximum Likelihood Estimation*. In *Springer Texts in Statistics (STS)*. New York, NY, USA: Springer.
- Manna, M., Rahman, M., Akter, . H., & Nahar, N. (2021). A Study of Banach Fixed Point Theorem and Its Applications. *American Journal of Computational Mathematics*, 11(02), 157-174. doi:10.4236/ajcm.2021.112011
- Martin, J. (1976). Maximum Likelihood Estimation for Dependent Observations. *J. R. Stat. Soc. B*, 38(1), 45-53.
- Mayilvaganan, S., & Balamuralitharan, S. (2018). A Mathematical Modelling and Analytical Solutions of Nonlinear Differential Equations Model with using Homotopy Perturbation Method. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(18), 4966-4970.
- Mazucheli, J., Korkmaz, M., Menezes, A., & Leiva, V. (2023). The unit generalized half-normal quantile regression model: formulation, estimation, diagnostics, and numerical applications. *Soft Comput*, 27, 279–295. doi:<https://doi.org/10.1007/s00500-022-07278-3>
- Mazucheli, J., Menezes, A., Fernandes, L., de Oliveira, R., & Ghitany, M. (2019). The unit-Weibull distribution as an alternative to the Kumaraswamy distribution for the modeling of quantiles conditional on covariates. *Journal of Applied Statistics*, 47(6), 954-974. doi:10.1080/02664763.2019.1657813
- McKenzie, E. (1985). An Autoregressive Process for Beta Random Variables. *Management Science*, 31, 988–997.

- Meintanis, S. (2016). A Review of Testing Procedures Based on the Empirical Characteristic Function. *South African Statist. J.*, 50(1), 1-14.
- Meintanis, S., Swanepoel, J., & Allison, J. (2014). The Probability Weighted Characteristic Function and Goodness-of-Fit Testing. *J. Stat. Plan. Infer.*, 146, 122–132.
- Meyn, S., & Tweedie, R. (2012). *Markov Chains and Stochastic Stability*, 2nd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Mhadhbi, N., Gana, S., & Alsaeedi, M. (2024). *Exact Solutions for Nonlinear Partial Differential Equations via a Fusion of Classical Methods and Innovative Approaches*. *Sci Rep* 14, 6443. doi:<https://doi.org/10.1038/s41598-024-57005-1>
- Milić, N. (2015). Neke mogućnosti analize geoprostorne distribucije krivičnih dela u radu policije. *NBP. Nauka, bezbednost, policija*, 20(1), 99-117. doi:<https://doi.org/10.5937/NBP1501099M>
- Milovanović, G. (2015). Construction and Applications of Gaussian Quadratures with Nonclassical and Exotic Weight Functions. *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math*, 60(2), 211–233.
- Mohler, G. O., Short, M. B., Brantingham, P. J., Schoenberg, F. P., & Tita, G. E. (2011). Self-Exciting Point Process Modeling of Crime. *Journal of the American Statistical Association*, 106(493), 100–108. doi:<https://doi.org/10.1198/jasa.2011.ap09546>
- Moran, P. (1950). Notes on Continuous Stochastic Phenomena. *Biometrika*, 37(1-2), 17–23.
- Nasiru, S., Chesneau, C., & Ocloo, S. (2024). The log-cosine-power unit distribution: A new unit distribution for proportion data analysis. *Decision Analytics Journal*, 100397. doi:<https://doi.org/10.1016/j.dajour.2024.100397>
- Nasiru, S., Chesneau, C., Abubakari, A. G., & Angbing, I. D. (2023). Generalized Unit Half-Logistic Geometric Distribution: Properties and Regression with Applications to Insurance. *Analytics*, 2(2), 438-462. doi:<https://doi.org/10.3390/analytics2020025>
- Nasiru, S.; Abubakari, A. G.; Chesneau, C. (2023). The Arctan Power Distribution: Properties, Quantile and Modal Regressions with Applications to Biomedical Data. *Mathematical and Computational Applications*, 28(1), 25. doi:<https://doi.org/10.3390/mca28010025>
- Newey, W. K., & McFadden, D. (1994). *Large Sample Estimation and Hypothesis Testing*. In: *Handbook of econometrics* (Vol. IV). Amsterdam: North-Holland.
- Noon, R. (2001). *Forensic Engineering Investigation*. USA: CRC Press.

- Noor, M., & Khan, W. (2012). New Iterative Methods for Solving Nonlinear Equation by Using Homotopy Perturbation Method . *Applied Mathematics and Computation*, 219, 3565–3574. doi:10.1016/j.amc.2012.09.040
- Ñuño, J. C., Herrero, M. A., & Primicerio, M. A. (2011). A mathematical model of a criminal-prone society. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* , 4(1), 193-207. doi:https://doi.org/10.3934/dcdss.2011.4.193
- Ñuño, J. G., Herrero, M. A., & Primicerio, M. A. (2008). A triangle model of criminality. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(12), 2926–2936. doi:https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.01.076.
- Okorie, E., Afuecheta, E., & Bakouch, S. (2023). Unit Upper Truncated Weibull Distribution with Extension to 0 and 1 Inflated Model – Theory and Applications. *Heliyon*, 9(11), e22260. doi:10.1016/j.heliyon.2023.e22260
- Ozdemir, S. (2018). *Principles of Data Science (Second Edition)*. Birmingham-Mumbai: Packt Publishing.
- Paolino, P. (2001). Maximum Likelihood Estimation of Models with Beta-distributed Dependent Variables. *Polit. Anal.*, 9(4), 325-346.
- Petrovic, N., Stojicic, S., Radovanovic, R., Nikolic, V., & Petrovic, M. (2022). Automated Fingerprint Identification System: with and without the Possibility of Correction of a Digitalised Image. . *Tehnički vjesnik*, 29(6), 2067-2073. doi:https://doi.org/10.175
- Pfaff, B. (2008). VAR, SVAR and SVEC Models: Implementation Within R Package vars. *J. Stat. Soft.*, 27(4), i04. Retrieved from https://www.jst-atsoft.org/v27/i04
- Pumi, G., Prass, T., & Souza, R. (2021). A Dynamic Model for Double-Bounded Time Series with Chaotic-Driven Conditional Averages. *Scand. J. Stat.*, 48(1), 68-86.
- Pumi, G., Prass, T., & Taufemback, C. (2024). Unit-Weibull Autoregressive Moving Average Models. *TEST* 2024, 33(1), 204–229.
- Pumi, G., Valk, M., Bisognin, C., Bayer, F., & Prass, T. (2019). Beta Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average Models. *J. Stat. Plann. Inference*, 200, 196-212.
- Raimundo, S., Yang, H., Rubio, F., Greenhalgh, D., & Massad, E. (2023). Modeling Criminal Careers of Different Levels of Offence. *Appl. Math. Comput*, 453, Article No. 128073. doi:https://doi.Org/10.1016/j.amc.2023.128073.

- Ribaux, O., & Canappele, S. (2017). *The Routledge International Handbook of Forensic Intelligence and Criminology*, Accepted Manuscript of a book chapter (chapter 12). Routledge. Retrieved from <https://www.routledgehandbooks.com/doi/10.4324/9781315541945-12>, <https://api.unil.ch/iris/server/api/core/bitstreams/5c0ae741-6cd6-44f9-b459-6e343fd6d1a0/content>
- Ribaux, O., Crispino, F., & Roux, C. (2014). Forensic intelligence: Deregulation or return to the roots of forensic science? *Australian Journal of Forensic Sciences*, 1(11). doi: 10.1080/00450618.2014.906656.
- Ribaux, O., Girod, A., Walsh, S. J., Margot, P., Mizrahi, S., & Clivaz, V. (2003). Forensic intelligence and crime analysis. *Law, Probability and Risk*, 2(1), 47-60. doi:10.1093/lpr/2.1.47.
- Rocha, A., & Cribari-Neto, F. (2017). Erratum to: Beta Autoregressive Moving Average Models. *TEST* 2017, 26(2), 451–459.
- Rocha, A.V.; Cribari-Neto, F. (2009). Beta Autoregressive Moving Average Models. *TEST* 2009, 18(3), 529–545.
- Roux, C., Bucht, R., Crispino, F., De Forest, P., Lennard, C., Margot, P., . . . Willis, S. (2022). The Sydney declaration – Revisiting the essence of forensic science through its fundamental principles. *Forensic Science International*, 332, 111182. doi:<https://doi.org/10.1016/j.forsciint.2022.111182>.
- Ruckdeschel, P., Kohl, M., Stabla, T., & F., C. F. (2006). S4 Classes for Distributions. *R News*, 6(2), 2-6. Retrieved from <https://CRAN.R-project.org/doc/Rnews> (accessed on 11 January 2026)
- Scher, V., Cribari-Neto, F., & Bayer, F. (2024). Generalized β ARMA Model for Double Bounded Time Series Forecasting. *Int. J. Forecasting*, 40(2), 721-734.
- Sen, P. K., & Singer, J. M. (2000). *Large Sample Methods in Statistics: An Introduction with Applications (reprint)*. USA: Chapman & Hall/CRC.
- Serfling, R. J. (2002). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics (2nd Edition)*. John Wiley & Sons.
- Shafiq, A., Sindhu, T. N., Hussain, Z., Mazucheli, J., & Alves, B. (2023). A Flexible Probability Model for Proportion Data: Unit Gumbel Type-II Distribution, Development, Properties,

- Different Method of Estimations and Applications. *Austrian Journal of Statistics*, 52(2), 116-140. doi:<https://doi.org/10.17713/ajs.v52i2.1407>
- Sharif, N., Alam, M. S., & Molla, H. U. (2025). Dynamics of Nonlinear Pendulum Equations: Modified Homotopy Perturbation Method. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 0(0). doi: <https://doi.org/10.1177/14613484251320219>
- Shim, J., Warkentin, M., Courtney, J., Power, D., R., S., & Carlsson, C. (2002). Past, present, and future of decision support technology. *Decision Support Systems*, 3, 111-126.
- Short, M. B., D'orsogna, M. R., Pasour, V. B., Tita, G. E., Brantingham, P. J., Bertozzi, A. L., & Chayes, L. B. (2008). A Statistical Model of Criminal Behaviour. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(supp01), 1249–1267. doi:10.1142/s0218202508003029
- Short, M., Möhler, G., Brantingham, P., & Tita, G. E. (2014). Gang rivalry dynamics via coupled point process networks. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 19(5), 1459-1477. doi:10.3934/dcdsb.2014.19.1459
- Simas, A., Barreto-Souza, W., & Rocha, A. (2010). Improved Estimators for a General Class of Beta Regression Models. *Comput. Stat. Data Anal.* , 54(2), 348–366.
- So, M., Chen, C., Chiang, T., & Lin, D. (2007). Modelling Financial Time Series with Threshold Nonlinearity in Returns and Trading Volume . *Appl. Stoch. Models Bus. Ind.* , 23(4), 319-338.
- Sooknanan, J., Bhatt, B., & Comissiong, D. M. (2013). Catching a gang - A mathematical model of the spread of gangs in a population treated as an infectious disease. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 83(1), 25-43. doi:<https://doi.org/10.12732/ijpam.v83i1.4>.
- Teschl, G. (2022). *Ordinary differential equations and dynamical systems*. American Mathematical Society. doi:10.1090/gsm/140
- Tsardakas, M. (2021). Mathematicam Modeling of Criminal Activity (Doctoral disertation). In H. W. University. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10399/4628>
- Tzavalis, E., & Kapetanios, G. (2010). Modeling structural breaks in economic relation ships using large shocks. *J. Econom. Dynam. Control*, 34(3), 417–436. doi:10.1016/j.jedc.2009.10.001
- Ullrich, T. (2021). On the Autoregressive Time Series Model Using Real and Complex Analysis. *Forecasting*, 3(4), 716-728. doi:<https://doi.org/10.3390/forecast3040044>

- Vučković, N., & Milašinović, N. (2024). (Bio)polymer-Based Powders As Hidden Treasures in Dactyloscopy. *Arab Journal of Forensic Sciences and Forensic Medicine*, 6, 69-80. doi:10.26735/KLXO7367.
- Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge University Press. section 18.1, UK.
- Yu, J. (2004). Empirical Characteristic Function Estimation and Its Applications. *Econom. Rev.*, 23, 93–123.
- Zakharov, A. (2001). *Abel Summation Method*. In: *Encyclopaedia of Mathematics*. Springer, Berlin-Heidelberg;.
- Zeigler, B. P., Praehofer, H., & Kim, T. G. (2000). *Theory of Modeling and Simulation: Discrete Event & Iterative System Computational Foundations (2nd Edition)*. London, UK: Academic Press.
- Zhang, P., Qiu, Z., & Shi, C. (2016). Simplexreg: an R Package for Regression Analysis of Proportional Data Using the Simplex Distribution. *Journal of Statistical Software*, 71, 1-21.
- Јовановић, М. (2022). *Оптимизација математичких модела за логистику безбедности и ефикасног одлучивања у колаборативним WEB сервисима електронске управе Републике Србије*. Београд: КПУ. Retrieved from <https://jakov.kpu.edu.rs/handle/123456789/1430>
- Јовановић, М. и сар. (2022). Asymptotic Properties and Application of GSB Process: A Case Study of the COVID-19 Dynamics in Serbia. *Mathematics*, 10(20), 3849. doi:<https://doi.org/10.3390/math10203849>
- Јоксимовић, Д., & Стојановић, В. (2019). *Вероватноћа и статистика*. Београд: Криминалистичко-полицијски универзитет.
- Кевкић, Т., & Стојановић, В. (2019). Approximate Solution of Coupled Schrödinger and Poisson Equation in Inversion Layer Problem: An Approach Based on Homotopy Perturbations. *Zeitschrift für Naturforschung A Journal of Physical Sciences*, 74(6), 457-467. doi:10.1515/zna-2018-0495
- Кевкић, Т., Стојановић, В., & Петковић, Д. (2019). Solving Schrödinger Equation for a Particle in One-Dimensional Lattice: An Homotopy Perturbations Approach. *Romanian Reports in Physics*, 71(1).

- Кевкић, Т., Стојановић, В., & Ранђеловић, Д. (2017). Application of Homotopy Perturbation Method in Solving Coupled Schrödinger and Poisson Equation in Accumulation Layer. *Romanian Journal of Physics*, 62, 9-10.
- Љајко, Е. и сар. (2021). Application of the Homotopy Perturbations Method in Approximation Probability Distributions of Non-Linear Time Series. *U.P.B. Sci. Bull., Series A*, 83(2), 177-186.
- Љајко, Е. и сар. (2023). Cauchy Split-BREAK Process: Asymptotic Properties and Application in Securities Market Analysis. *UPB Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, 85(4), 139-154.
- Љајко, Е. и сар. (2023). Cauchy Split-BREAK Process: Asymptotic Properties and Application in Securities Market Analysis. *UPB Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, 85(4), 139-154.
- Миловановић, Г., Јоксимовић, Д., & Ђорђевић, Р. (2015). *Математика*. Београд: КПУ.
- Радовановић, Р. (2017). *Форензички методу у криминалистици - тематски зборник радова*. Београд: Криминалистичко полицијска академија.
- Стојановић, В. и сар. (2014). Stochastic Analysis of GSB Process. *Publ. Inst. Math.*, 95(109), 149-159.
- Стојановић, В. и сар. (2015). Model of General Split-BREAK Process. *REVSTAT– Stat. J.*, 13(2), 145-168.
- Стојановић, В. и сар. (2016). Distributional Properties and Parameters Estimation of GSB Process: An Approach Based on Characteristic Functions. *ALEA – Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 13(2), 835-861.
- Стојановић, В. и сар. (2018). Determination of Invariant Measures: An Approach Based on Homotopy Perturbations. *U.P.B. Sci. Bull., Series A*, 80(2), 119-128.
- Стојановић, В. и сар. (2023). Laplacian Split-BREAK Process with Application in Dynamic Analysis of the World Oil and Gas Market. *Axioms*, 12, 622. doi:<https://doi.org/10.3390/axioms12070622>
- Стојановић, В. и сар. (2024a). Laplace-Logistic Unit Distribution with Application in Dynamic and Regression Analysis. *Mathematics*, 12(14), 2282. doi:<https://doi.org/10.3390/math12142282>
- Стојановић, В. и сар. (2024b). Gumbel–Logistic Unit Distribution with Application in Telecommunications Data Modeling. *Symmetry*, 16(11), 1513. doi:<https://doi.org/10.3390/sym16111513>

- Стојановић, В. и сар. (2025a). Cauchy–Logistic Unit Distribution: Properties and Application in Modeling Data Extremes. *Mathematics*, 13(2), 255. doi:<https://doi.org/10.3390/math13020255>
- Стојановић, В., & Кевкић, Т. (2018). Homotopy perturbations method: Theoretical aspects & applications. *University Thought - Publication in Natural Sciences*, 40-45. doi:10.5937/univtho8-17290
- Стојановић, В., Поповић, Б., & Поповић, П. (2011). The Split-BREAK Model. *Brazilian Journal of Statistics & Probability*, 25(1), 44-63. doi:10.1214/09-BJPS025
- Стојановић, В.С. и сар. (2025b). A Flexible Unit Distribution Based on a Half-Logistic Map with Applications in Stochastic Data Modeling. *Symmetry*, 17(2), 278.
- Стојичић, С. (2013). Стручно лице у кривичном поступку - семинарски. КПА.
- Стојичић, С. и сар. (2025). Mathematical modeling of criminal activities: An approach based on homotopy perturbations. *Advances in Differential Equations and Control Processes*, 3329. doi:<https://doi.org/10.59400/adeep3329>
- Стојичић, С. и сар. (2026). Bivariate Generalized Split-BREAK Process with Application in Modeling Crime Dynamics. *Mathematics*, 14(5), 754. doi:<https://doi.org/10.3390/math14050754>
- Стојичић, С., Петровић, Н., Радовановић, Р., Срећковић, М., Благојевић, М., & Радовановић, Н. (2023). One Application of Analytical Hierarchical Process in Forensic as Method for Risk Assessment. *The XIII International Scientific Conference Archibald Reiss Days* (pp. 428-443). Београд: КПУ.
- Шкулић, М. (2018). Доказне радње вешрачење и увиђај. (П. и.-П. правосуђу, Interviewer)

а. АУТОРСКИ РАДОВИ

1. **Стојичић, С.;** Стојановић, В.; Радовановић, Р.; Јоксимовић, Д.; Јовановић, М. Mathematical Modeling of Criminal Activities: An Approach Based on Homotopy Perturbations. *Advances in Differential Equations and Control Processes*, 2025, 32(3). <https://doi.org/10.59400/adecp3329> (M22)
2. **Стојичић, С.;** Стојановић, В.С.; Јовановић, М.; Јоксимовић, Д.; Радовановић, Р. Bivariate Generalized Split-BREAK Process with Application in Modeling Crime Dynamics. *Mathematics* 2026, 14, 754. <https://doi.org/10.3390/math14050754> (M21A)
3. Стојановић, В.С.; Bakouch H.S.; **Стојичић, С.;** Alghmadi S. Proportional Autoregressive Quasi-Lindley Half-logistic Unit Process with Application in Modeling Crime Dynamics, *Symmetry*, 2026, предат за штампу. (M22)

9. БИОГРАФИЈА

Рођена сам 9. октобра 1961. године у Пожаревцу. У Пожаревцу сам завршила основну школу и средњу школу. У Београду сам завршила Природно математички факултет, смер Математика, информатика са применом рачунара јуна 1985. године, са просечном оценом 8,2 током студија. Специјалистичке академске студије на Криминалистичко-полицијској академији у Београду завршила сам 2013. године на смеру Криминалистичко-форензичке идентификације.

Од септембра 1985. до новембра 1985. године радила сам као наставник математике у ОШ Доситеј Обрадовић, у Пожаревцу. Потом сам радила у организационим јединицама ЈНА/ВС од децембра 1985. до априла 1987. године и то у рачунском центру Центра високих војних школа, као систем инжењер, а потом и као предавач на Војној академији из предмета Информатика. Од маја 1987. до новембра 2004. године радила сам у Војно географском институту, као систем аналитичар. У том периоду учествовала сам у увођењу нових технологија у процесе рада и дигитализацији података о простору.

Почев од новембра 2004. запослена сам у Министарству унутрашњих послова Републике Србије, где сам учествовала у реализацији активности које су се односиле на планирање и реализацију ИКТ подршке оперативним линијама рада, као и на увођење података о простору у дигиталном облику у процесе рада. Такође сам учествовала у развоју и примена методологије управљања пројектима, програмирању и реализацији билатерални и пројеката подржаних из предприступних фондова Европске уније усмерених ка унапређењу рада и дигитализацији пословних процеса. У оквиру послова везаних за европске интеграције учествовала сам од скрининга, израде акционог плана и праћења реализације за преговарачко поглавље 24 – Правда, слобода и безбедност, за које је Министарство унутрашњих послова носилац реализације, као и преговарачко поглавље 10 – Информационо друштво и медији, у складу са секундарном надлежношћу Министарства унутрашњих послова.

Тренутно сам запослена на радном месту шеф одсека у Управи за информационе технологије, Сектора за информационо-комуникационе технологије. Такође, овлашћено сам лице за координацију и администрацију учешћа Министарства унутрашњих послова у иновативно истраживачким програмима ЕУ, укључујући H2020, Horizont Еуропа, као и

национална контакт тачка за пројекте из области безбедности у оквиру иновативно истраживачких програма ЕУ. Од светских језика говорим енглески језик.

КРИМИНАЛИСТИЧКО-ПОЛИЦИЈСКИ УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ



ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Име и презиме аутора: Снежана Стојичић

Број индекса: 2Ф1-0001/18

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**„МАТЕМАТИЧКО-СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ ДИНАМИКЕ ОДРЕЂЕНИХ
ОБЛИКА КРИВИЧНИХ ДЕЛА ЗНАЧАЈНИХ ЗА ФОРЕНЗИЧКЕ АНАЛИЗЕ“**

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, _____



ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКОГ РАДА

Име и презиме аутора: Сежана Стојичић

Број индекса: 2Ф1-0001/18

Студијски програм: Докторске студије форензичко инжењерство

Наслов рада: „Математичко-стохастички модели динамике одређених облика кривичних дела значајних за форензичке анализе“

Ментор: проф. др Владица Стојановић, ред. професор

проф. др Радован Радовановић, ред. професор

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањења у **Дигиталном репозиторијуму Криминалистичко-полицијског универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама **Криминалистичко- полицијског универзитета у Београду**.

Потпис аутора

У Београду, _____

КРИМИНАЛИСТИЧКО-ПОЛИЦИЈСКИ УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ



Изјава о коришћењу

Овлашћујем библиотеку Криминалистичко-полицијског универзитета да у Дигитални репозиторијум Криминалистичко-полицијског универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„Математичко-стохастички модели динамике одређених облика кривичних дела значајних за форензичке анализе“
која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Криминалистичко-полицијског универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
- ③. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

Потпис аутора

У Београду, _____

1. **Ауторство.** Дозвољава те умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољава те умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољава те умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољава те умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољава те умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољава те умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.